

ALEMÃO: UM SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO, FINANCEIRAMENTE, IMPRESTÁVEL!

17/07/2026 - Professor Msc. Jackson Ciro Sandrini – jcsandrini@ufpr.br

Quando nos referimos a questões financeiras, estamos, na realidade, falando em dinheiro, que tem valor diferente no tempo (VDT), e quem trata muito bem dessa matéria é a Matemática Financeira, **enquanto ciência exata**, cujo objetivo precípuo é estudar as formas de evolução do dinheiro no tempo, nos investimentos e empréstimos/descontos, em geral: transportar valores a presente e a futuro, sob uma taxa de juros, por **determinado prazo ou número de parcelas**, conforme certo regime de capitalização.

É importante salientar que existem, apenas, dois regimes de capitalização dos juros: simples e composto, mutuamente excludentes, que destacam a forma como os juros são calculados e incorporados ao capital, no decorrer do tempo: por um ou mais períodos. Frise-se: capitalizar juros significa **incorporar juros ao capital**, podendo a taxa incidir sobre esse montante (composto) ou somente sobre o capital (simples). Por conseguinte, como existem dois regimes de capitalização, que fique, então, claro: juro capitalizado não é sinônimo de juro composto (juros sobre juros).

Dizemos capitalização simples porque a base da incidência da taxa é simples, formada por um único valor, na data zero, denominado capital. Os juros simples exigem um único período de capitalização e vencem a termo: **são incorporados ao capital uma única vez**, no vencimento, e não admitem, por consequência, fracionamento de prazo para formar base de cálculo de novos juros. Frise-se: **o capital (valor presente) e o montante (valor futuro) não são cindíveis**, como se confirma, pelas suas tão conhecidas fórmulas de cálculo:

$$M = C \times (1 + i \times n) \quad \Rightarrow \quad C = M \times \frac{1}{(1 + i \times n)}$$

Observando as fórmulas, é cristalino e fica deveras fácil comprovar que, independentemente da taxa e do número de períodos, os juros simples são incorporados ao capital ou desincorporados do montante uma única vez: **o capital e montante não são cindíveis e não admitem, portanto, fracionamento de prazo**. Assim, não há como realizar **um único empréstimo/financiamento** para ser liquidado em mais de um pagamento. Simples, assim!

Dizemos composta porque a base da incidência da taxa é composta, formada não somente pelo capital; mas, também, pelos juros, parciais ou totais, formados nos períodos anteriores de capitalização. Os juros compostos exigem mais de um período de capitalização para que a taxa de juros tenha a possibilidade de incidir, também, sobre os juros vencidos e não pagos ou resgatados, parcial ou totalmente: **são incorporados ao capital, periodicamente**, de acordo com a taxa e o número de períodos de capitalização.

Portanto, não vencem a termo e exigem mais de um período de capitalização: o fracionamento de prazo ou a cindibilidade do capital e montante, com a taxa incidindo sobre esse montante (saldo), juros sobre juros, são o fundamento da capitalização composta. Frise-se: **o valor presente e o valor futuro são, obrigatoriamente, cindíveis**, como se confirma, pelas suas tão conhecidas fórmulas de cálculo:

$$M = C \times (1 + i)^n \quad \Rightarrow \quad C = M \times \frac{1}{(1 + i)^n}$$

Observando as fórmulas, é cristalino e fica deveras fácil comprovar que, independentemente da taxa e do número de períodos, os juros compostos **são incorporados ao capital ou desincorporados do montante, periodicamente**: o capital e montante são cindíveis, obrigatoriamente, bem como o a exigência de fracionamento de prazo, para que haja a possibilidade de a taxa de juros incidir não apenas sobre o capital; mas, também, sobre os juros vencidos e não pagos ou sacados.

O **Sistema Alemão de Amortização** consiste na liquidação de um empréstimo/financiamento, por meio de prestações constantes e periódicas, exceto a primeira, cujo pagamento corresponde, **por convenção**, aos juros do primeiro período, cobrados no momento do financiamento; logo, os juros serão sempre pagos antecipadamente.

Para obtenção dos valores a serem utilizados na construção da planilha de amortização do referido sistema, indicaremos o valor do empréstimo por **VE**, a taxa unitária efetiva de juros por **i** e o número de períodos ou de pagamentos por **n**.

As amortizações e os pagamentos periódicos são, respectivamente, indicados pelas letras **A_t** e **PGTO_t**, em que $t = 1, 2, 3, \dots, n$. Frise-se: o final de um período corresponde ao início do período seguinte, por óbvio.

Considerando um empréstimo (VE) no instante t_0 , segundo esse sistema a instituição financeira cobrará, antecipadamente, os juros relativos ao produto da taxa pelo valor do empréstimo; mas, nada amortiza, de tal forma que o tomador receberá, no início do primeiro período (data zero), o valor do empréstimo (VE).

Então, ao final do primeiro período, o tomador fará a primeira amortização **A₁**, e passará a dever **SD₁**:

$$SD_1 = VE - A_1$$

Como ocorrerá a primeira amortização, o tomador pagará, antecipadamente, juros sobre o saldo devedor, correspondentes a $i \times SD_1$, e o pagamento, ao final do primeiro período, será:

$$PGTO = A + J \rightarrow PGTO_1 = A_1 + i \times SD_1 \rightarrow PGTO_1 = A_1 + i \times (VE - A_1)$$

Ao final do segundo período, o tomador deverá **SD₁** e fará a segunda amortização **A₂**, e passará a dever:

$$SD_2 = SD_1 - A_2$$

Depois da segunda amortização, novamente, pagará, antecipadamente, juros sobre o saldo devedor, correspondentes a $i \times SD_2$, e o pagamento no final do segundo período será:

$$PGTO_2 = A_2 + i \times SD_2 \rightarrow A_2 + i \times (SD_1 - A_2) \rightarrow PGTO_2 = A_2 + i \times (VE - A_1 - A_2)$$

Depois da terceira amortização, novamente, pagará juros antecipados sobre o saldo devedor, correspondentes a $i \times SD_3$ e o pagamento no final do terceiro período será:

$$PGTO_3 = A_3 + i \times SD_3 \rightarrow A_3 + i \times (SD_2 - A_3) \rightarrow PGTO_3 = A_3 + i \times (SD_1 - A_2 - A_3) \rightarrow$$

$$PGTO_3 = A_3 + i \times (SD_0 - A_1 - A_2 - A_3)$$

Então, como se constata, o saldo devedor, em um tempo **t** qualquer, será:

$$SD_t = SD_{t-1} - A_t$$

Considerando que os juros já foram, integralmente, liquidados, a última amortização **A_n** terá valor igual ao último pagamento **PGTO_n** e, como os pagamentos são iguais, a partir do primeiro, teremos:

$$PGTO_1 = PGTO_2 \therefore A_1 + i \times (VE - A_1) = A_2 + i \times (VE - A_1 - A_2) \rightarrow$$

$$A_1 + i \times (VE - A_1) = A_2 + i \times (VE - A_1) - i \times A_2$$

Considerando que $A_1 = A_2 - i \times A_2 \rightarrow A_1 = A_2 \times (1 - i) \therefore A_2 = A_1 \div (1 - i)$, conclui-se:

$$A_3 = \frac{A_2}{(1-i)} \Rightarrow A_3 = \frac{A_1}{(1-i)^2} \Rightarrow A_t = \frac{A_1}{(1-i)^{t-1}}$$

Como a soma das amortizações é igual ao valor do empréstimo: $VE = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$ e, substituindo os valores dessas amortizações, teremos:

$$VE = \frac{A_1}{(1-i)^0} + \frac{A_1}{(1-i)^1} + \frac{A_1}{(1-i)^2} + \dots + \frac{A_1}{(1-i)^{n-1}}$$

Fatorando o termo comum A_1 , teremos:

$$VE = A_1 \times \frac{[(1-i)^0 + (1-i)^1 + (1-i)^2 + \dots + (1-i)^{n-1}]}{(1-i)^{n-1}}$$

Considerando que o numerador, dentro dos colchetes, é a soma de n termos de uma PG, de razão $= (1-i)$ e primeiro termo $= 1$, teremos:

$$S_{PG} = \frac{[1-(1-i)^n]}{i} \Rightarrow VE = A_1 \times \frac{[1-(1-i)^n]}{i} \times \frac{1}{(1-i)^{n-1}}$$

$$VE = \frac{A_1}{i} \times \frac{[1-(1-i)^n]}{(1-i)^{n-1}} \Rightarrow \frac{A_1}{(1-i)^{n-1}} = \frac{i \times VE}{[1-(1-i)^n]}$$

$$\text{Considerando que } A_n = PGTO = PGTO_n = \frac{A_1}{(1-i)^{(n-1)}} \Rightarrow PGTO = VE \times \left[\frac{i}{1-(1-i)^n} \right]$$

Para ratificar e deixar mais clarividente, vamos adotar o seguinte exemplo: calcular o valor de 4 prestações mensais e iguais, para liquidar um empréstimo de \$ 100.000,00, a juros efetivos de 10% ao mês, cobrados antecipadamente, e demais elementos para elaborar a planilha de amortização, de acordo com o Sistema Alemão de Amortização:

$$p = VE \times \left[\frac{i}{1-(1-i)^n} \right] \Rightarrow 100.000,00 \times \left[\frac{0,10}{1-(1-0,10)^4} \right] \therefore p = 29.078,22$$

$$A_t = p \times (1-i)^{(n-t)} \Rightarrow A_1 = 29.078,22 \times (1-0,10)^{(4-1)} \Rightarrow 21.198,02$$

$$A_2 = 29.078,22 \times (1-0,10)^{(4-2)} \quad \text{ou} \quad \frac{21.198,02}{(1-0,10)} \Rightarrow 23.553,36$$

$$A_3 = 29.078,22 \times (1-0,10)^{(4-3)} \quad \text{ou} \quad \frac{23.553,36}{(1-0,10)} \Rightarrow 26.170,40$$

$$A_4 = 29.078,22 \times (1-0,10)^{(4-4)} \quad \text{ou} \quad \frac{26.170,40}{(1-0,10)} \Rightarrow 29.078,22$$

Como se constata, o valor da amortização cresce a uma constante $= 1 / (1-i) = 1 / (1-0,10) \rightarrow 1,1111\dots$

Tendo em vista que o saldo devedor é a diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, como nos demais sistemas usuais de amortização, teremos:

$$SD_1 = SD_0 - A_1 \Rightarrow SD_1 = 100.000,00 - 21.198,02 \Rightarrow 78.801,98$$

$$SD_2 = SD_1 - A_2 \Rightarrow SD_2 = 78.801,98 - 23.553,36 \Rightarrow 55.248,62$$

$$SD_3 = SD_2 - A_3 \Rightarrow SD_3 = 55.248,62 - 26.170,40 \Rightarrow 29.078,22$$

$$SD_4 = SD_3 - A_4 \Rightarrow SD_4 = 29.078,22 - 29.078,22 \Rightarrow 0,00$$

Como o juro é a diferença entre a prestação constante e a amortização do período ou, no Sistema Alemão, em que os juros são pagos antecipadamente, o produto da taxa pelo saldo devedor do período, teremos:

$$J_0 = SD_0 \times 0,10 \Rightarrow 100.000,00 \times 0,10 \Rightarrow 10.000,00$$

$$J_1 = p - A_1 \Rightarrow SD_1 = 29.078,22 - 21.198,02 \quad \text{ou} \quad J_1 = SD_1 \times 0,10 \Rightarrow 78.801,98 \times 0,10 \Rightarrow 7.880,20$$

$$J_2 = p - A_2 \Rightarrow SD_2 = 29.078,22 - 23.553,36 \text{ ou } J_2 = SD_2 \times 0,10 \Rightarrow 55.248,62 \times 0,10 \Rightarrow 5.524,86$$

$$J_3 = p - A_3 \Rightarrow SD_3 = 29.078,22 - 26.170,40 \text{ ou } J_3 = SD_3 \times 0,10 \Rightarrow 29.078,22 \times 0,10 \Rightarrow 2.907,82$$

$$J_4 = p - A_4 \Rightarrow SD_4 = 29.078,22 - 29.078,22 \Rightarrow 0,00$$

Depois de obtidos os valores que compõem o referido Sistema Alemão de Amortização, elaboramos a planilha de amortização:

n	PGTO	JUROS	AMORT	DEVEDOR
0	10.000,00	10.000,00	0,00	100.000,00
1	29.078,22	7.880,20	21.198,02	78.801,98
2	29.078,22	5.524,86	23.553,36	55.248,62
3	29.078,22	2.907,82	26.170,40	29.078,22
4	29.078,22	0,00	29.078,22	0,00
Σ	126.312,88	26.312,88	100.000,00	

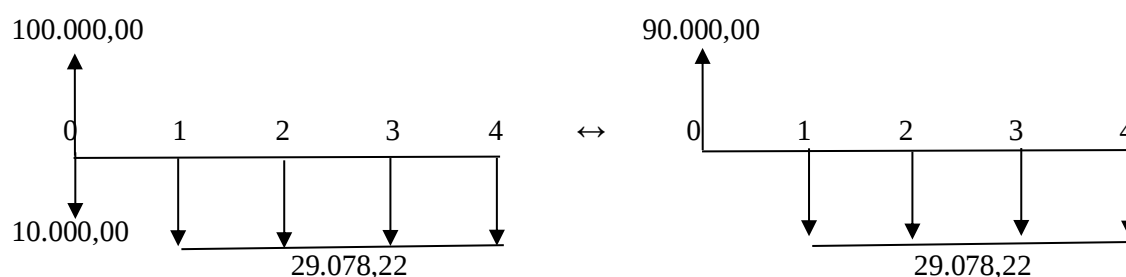
Constata-se que a planilha de amortização do Sistema Alemão, **embora pareça perfeita**, não condiz com a realidade; porquanto, se quisermos liquidar o empréstimo ao final do primeiro mês, deveríamos pagar a primeira prestação de \$ 29.078,22, mais o saldo devedor de \$ 78.801,98, totalizando \$ 107.880,20. Se considerarmos \$ 90.000,00, valor correto emprestado, estaríamos pagando taxa efetiva de 19,87% ao mês e se considerarmos o valor do empréstimo como \$ 100.000,00, conforme planilha, estaríamos pagando taxa efetiva de 7,88% ao mês, taxas completamente diferentes da taxa contratada e, assim, nos períodos seguintes, que teríamos efetivas diferentes em cada mês que liquidássemos antecipadamente: surreal!

É importante destacar que juro é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente (capital ou valor atual), pelo **prazo decorrido**, e desconto é o resultado da incidência da taxa sobre o valor presente (capital ou valor atual), pelo **prazo a decorrer** (tempo de antecipação). Portanto, “**juros antecipados**” é uma falácia: simplesmente, não existem! Frise-se: quando há antecipação de pagamento, trata-se de desconto.

Ademais, é importante enfatizar que, em qualquer sistema de amortização, o valor do pagamento é igual ao somatório do juro e amortização, como se confirma, inclusive, na planilha acima. Entretanto, quando o pagamento for realizado na data zero, 100% é amortização (capital) e, se realizado em qualquer outra data, considerando o valor do dinheiro no tempo (VDT), princípio basilar da matemática financeira, o valor dos pagamentos é montante (capital + juros) e, para obtermos o valor da amortização correspondente (capital), basta transportar o valor desses pagamentos para data zero, desincorporando (descapitalizando) os juros.

Por conseguinte, quando a planilha do Sistema Alemão considera o pagamento, na data zero, como juros (antecipados), na realidade, esse valor descontado, efetivamente, é amortização, como se confirma no fluxo de caixa seguinte, que representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas de caixa.

Para o tomador, o empréstimo é entrada e os pagamentos, saídas, em respectivas datas, como se confirma:



A Matemática Financeira é uma ciência exata; mas, não óbvia, que trata do valor do dinheiro no tempo: um valor hoje (capital) tem menor valor monetário que essa mesma quantia no futuro (montante) e vice-versa.

Enfatize-se que, financeiramente, dois mais dois não são quatro: depende da data em que se encontram e, somente serão quatro, se estiverem na mesma data. Valores de uma mesma data são grandezas que podem ser somadas ou subtraídas, como é o caso do Sistema Alemão, na data zero; todavia, valores em datas diferentes são grandezas que somente podem ser somadas ou subtraídas depois de transportadas para uma data comum (focal), capitalizando ou descapitalizando, conforme o caso, por meio da aplicação de uma taxa de juros ou de desconto, por determinado prazo.

Para comparar alternativas de fluxo de caixa, com valores de entradas e saídas exigidos em datas distintas, somente se considera esses valores equivalentes quando, transportados para uma mesma data focal, com determinada taxa de juros, tiverem valores de entradas e saídas iguais, zerando o fluxo de caixa. À equação resultante dessa igualdade, dá-se o nome de **equação de valor**.

Em quaisquer sistemas de amortização, é condição *sine qua non* que os pagamentos sejam, financeiramente, equivalentes ao valor dívida, descontados à taxa efetiva de juros, conforme o regime de capitalização. Tendo em vista que **a taxa de juros incide sobre os saldos devedores** que, por não se encontrarem na data zero **são montantes** e, obedecendo ao princípio do valor do dinheiro no tempo (VDT), cerne da matemática financeira, o regime de capitalização do Sistema Alemão de Amortização é composto.

Desse modo, vamos calcular o valor presente do fluxo de pagamentos, para confirmar se são equivalentes, financeiramente, ao valor do empréstimo:

$$VP = 10.000,00 + \frac{29.078,22}{(1+10\%)^1} + \frac{29.078,22}{(1+10\%)^2} + \frac{29.078,22}{(1+10\%)^3} + \frac{29.078,22}{(1+10\%)^4} \Rightarrow 102.174,05$$

Como se verifica, o valor presente dos pagamentos, descontados à taxa efetiva do empréstimo, nos revela que houve pagamento a maior de **\$ 2.174,05**, na data zero, demonstrando, cientificamente, que o valor das parcelas está superavaliado, não condizente com o valor tomado, efetivamente, como empréstimo.

Da mesma forma, em quaisquer sistemas de amortização, é condição *sine qua non* que os pagamentos, descontados à taxa efetiva de juros, sejam, financeiramente, equivalentes ao valor dívida, obedecendo ao regime de capitalização.

Desse modo, vamos calcular a taxa efetiva mensal de juros que iguala o valor presente dos pagamentos ao valor do empréstimo, para confirmar se são equivalentes, financeiramente:

$$100.000,00 - 10.000,00 = \frac{29.078,22}{(1+i)^1} + \frac{29.078,22}{(1+i)^2} + \frac{29.078,22}{(1+i)^3} + \frac{29.078,22}{(1+i)^4} \Rightarrow 11,11\%$$

Como se verifica, a taxa efetiva mensal de juros que iguala o valor presente dos pagamentos ao valor do empréstimo é superior à taxa contratada de 10%, ratificando que houve cobrança a maior.

Fica evidente, por conseguinte, que o Sistema Alemão de Amortização, **financeiramente, é imprestável**, ao não cumprir as duas condições *sine quibus non*, além de a planilha de amortização estar incorreta, ao considerar o pagamento inicial como juros, quando, efetivamente, deveria amortizar o valor do empréstimo, como se fosse uma entrada; aliás, valor que, efetivamente, será recebido pelo tomador:

n	PGTO	JUROS	AMORT	DEVEDOR	FATOR JC
0	10.000,00		10.000,00	90.000,00	
1	29.078,22	2.643,47	26.434,75	69.921,78	0,90909091
2	29.078,22	5.046,63	24.031,59	47.835,74	0,82644628
3	29.078,22	7.231,32	21.846,90	23.541,09	0,75131480
4	29.078,22	9.217,40	19.860,82	- 3.183,02	0,68301346
Σ	126.312,88	24.138,84	102.174,05		3,16986545

Como se ratifica, o valor dessas quatro prestações mensais de \$ 29.078,22, mais entrada de \$ 10.000,00, nos revela que houve amortização a maior de \$ 2.174,05, na data zero, correspondente ao montante de \$ 3.183,02

na data final 4, demonstrando, cientificamente, que o valor das parcelas está superavaliado, não condizente com o valor, efetivamente contratado.

Como se depreende, podemos considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema Alemão de Amortização, como se ratifica na planilha seguinte, **desdobrando os juros a cada período, calculados sobre o montante** (capital + juros anteriores):

Empréstimos		VALOR DOS JUROS COMPOSTOS MENSAIS				Pagamentos		Saldo
Amortização		1	2	3	4	Σ Juros	Prestação	Devedor
0	10.000,00						10.000,00	90.000,00
1	26.434,75	2.643,47				2.643,47	29.078,22	69.921,78
2	24.031,59	2.403,16	2.643,47			5.046,63	29.078,22	47.835,74
3	21.846,90	2.184,69	2.403,16	2.643,47		7.231,32	29.078,22	23.541,09
4	19.860,82	1.986,08	2.184,69	2.403,16	2.643,47	9.217,40	29.078,22	-3.183,02
Σ	102.174,05	9.217,40	7.231,32	5.046,63	2.643,47	24.138,84	126.312,88	

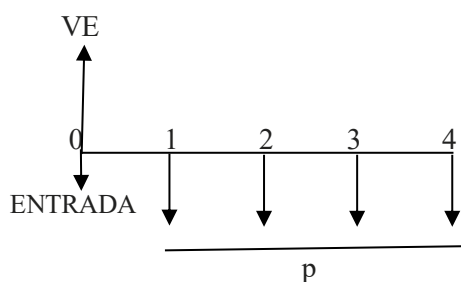
Como se verifica na correta planilha de amortização, \$ 9.217,40 correspondem, efetivamente, ao somatório dos juros do primeiro mês dos quatro empréstimos distintos e não ao juro do primeiro mês dos sistemas usuais de amortização, que calculam os juros, **por convenção**, sobre o saldo devedor anterior e os consideram, indevidamente, como totalmente liquidados.

Apenas, para ratificar, é importante lembrar que a soma dos juros de cada período (total de juros) deve ser igual à diferença entre os valores do pagamento e amortização.

Fica muito claro, também, que realizar um único empréstimo de \$ 100.000,00, com entrada de \$ 10.000,00, para liquidar quatro meses depois, à taxa de 10% ao mês, é o mesmo que realizar quatro empréstimos distintos de \$ 26.434,75; \$ 24.031,59; \$ 21.846,90 e \$ 19.860,82 ; porquanto, em ambos os casos, pagaremos quatro prestações mensais e iguais a \$ 29.078,22, qualquer que seja a data focal adotada; porém, saliente-se, com pagamento a maior de \$ 2.174,05, na data zero, correspondentes ao montante de \$ 3.183,02 na data 4, ratificando que o **Sistema Alemão de Amortização, financeiramente, é imprestável**.

Na sequência, adotando o mesmo exemplo, veremos como calcular os elementos e elaborar a planilha de amortização de forma **correta, financeiramente**, considerando o valor do dinheiro no tempo (VDT), sustentáculo da matemática financeira!

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



$$VP = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \frac{P}{(1+i)^4}$$

Como o valor de p é comum, colocamos em evidência (fatoramos) e obtemos:

$$VP = p \times \left[\frac{1}{(1+i)^4} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^1} \right]$$

Conclui-se, por conseguinte, que o valor presente e o valor da prestação poderão ser obtidos pela multiplicação do valor da prestação e pela divisão do valor presente (capital), ambos pelo somatório dos fatores de descapitalização em juros compostos, respectivamente:

$$VP = p \times \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+i)^j} \Rightarrow p = VP \div \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+i)^j}$$

Entretanto, como se observa, entre colchetes temos a soma dos termos de uma progressão geométrica: $S_{PG} = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$ Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica limitada, de razão igual a $(1+i)^1$, teremos:

$$VP = p \times \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{i} \Rightarrow p = VP \times \frac{i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

Considerando que se tem duas inversões, além de expoente negativo, há certa preferência em adotar outra fórmula, resultante da multiplicação do numerador e do denominador por $(1+i)^n$:

$$VP = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]} \Rightarrow p = VP \times \frac{[(1+i)^n \times i]}{[(1+i)^n - 1]}$$

Então, calculando o valor da prestação constante, teremos:

$$p = \frac{90.000}{3,169865} \Rightarrow p = 90.000 \times \frac{10\%}{[1 - (1+10\%)^{-4}]} \Rightarrow p = 90.000 \times \frac{[(1+10\%)^4 \times 10\%]}{[(1+10\%)^4 - 1]} = 28.392,37$$

É importante observar que essa última fórmula já responde, cientificamente, que o montante de juros compostos de um empréstimo de \$ 90.000,00 é igual ao montante das quatro parcelas mensais de \$ 28.392,37, fazendo-nos concluir que essas parcelas se dão a juros compostos: juros sobre juros:

$$VP = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]} \Rightarrow \frac{VF}{(1+i)^n} = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]} \therefore VF = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$90.000 \times (1+10\%)^4 = 28.392,37 \times \frac{[(1+10\%)^4 - 1]}{10\%} = 131.769,00$$

Como se verifica, tanto faz liquidar um empréstimo de \$ 90.000,00, quatro meses depois, com pagamento único de \$ 131.769,00, ou em 4 prestações mensais e iguais a \$ 28.392,37; pois, a juros compostos de 10% ao mês, serão equivalentes, com igualdade de entradas e saídas de caixa, em qualquer data focal.

Em seguida, demonstraremos que, financeiramente, o cálculo do saldo devedor depende, apenas, do valor do saldo devedor anterior (quanto se deve) e da prestação (quanto se paga); aliás, é o que interessa para o tomador do empréstimo e independe de como se separa a prestação em juros e amortização, que ocorre, apenas, para atender a uma condição fisco-contábil.

n	SD ANTES	PGTO	SD DEPOIS
0			90.000,00
1	99.000,00	28.392,37	70.607,63
2	77.668,39	28.392,37	49.276,02
3	54.203,62	28.392,37	25.811,25
4	28.392,37	28.392,37	0,00

Como se verifica, depois de calcularmos o valor das prestações, teremos, ao final do primeiro período uma dívida de \$ 99.000,00, que é o valor do empréstimo (saldo devedor zero), capitalizado um período a 10%, quando, então, pagaremos a primeira prestação e, por estar na mesma data focal, simplesmente, subtraímos o valor da prestação para obter o saldo devedor de \$ 70.607,63. E, assim, sucessivamente, como se comprova:

$$SD_1 = SD_0 \times (1+i) - p_1 \Rightarrow SD_1 = 90.000,00 \times (1+10\%) - 28.392,37 \Rightarrow 70.607,63$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1+i) - p_2 \Rightarrow SD_2 = [SD_0 \times (1+i)^1 - p_1] \times (1+i) - p_2 \Rightarrow SD_2 = SD_0 \times (1+i)^2 - p_1 \times (1+i) - p_2$$

$$SD_2 = 90.000,00 \times (1+10\%)^2 - 28.392,37 \times (1+10\%)^1 - 28.392,37 \Rightarrow 49.276,02$$

$$SD_3 = SD_2 \times (1+i) - p_3 \Rightarrow SD_3 = SD_0 \times (1+i)^3 - p_1 \times (1+i)^2 + p_2 \times (1+i)^1 - p_3$$

$$SD_3 = 90.000,00 \times (1+10\%)^3 - 28.392,37 \times (1+10\%)^2 + 28.392,37 \times (1+10\%)^1 - 28.392,37 \Rightarrow 25.811,25$$

$$SD_4 = SD_3 \times (1+i) - p_4 \Rightarrow SD_4 = SD_0 \times (1+i)^4 - p_1 \times (1+i)^3 + p_2 \times (1+i)^2 - p_3 \times (1+i)^1$$

$$SD_4 = 90.000,00 \times (1+10\%)^4 - 28.392,37 \times (1+10\%)^3 + 28.392,37 \times (1+10\%)^2 - 28.392,37 \times (1+10\%)^1 \Rightarrow 0$$

Desta forma, constata-se que o saldo devedor de um período qualquer independe do valor do juro e da amortização. Isso quer dizer que, a princípio, o juro e a amortização podem tomar qualquer valor, desde que a soma seja igual ao valor da prestação e o total das amortizações seja igual ao valor do empréstimo; pois, não altera o valor do fluxo de pagamentos e saldos devedores. Destaque-se que essa relação é aplicável a qualquer sistema de amortização em que, para calcular os juros, a taxa incida sobre o saldo devedor anterior.

Então, a incidência da taxa sobre o saldo devedor anterior para calcular o juro do período e a amortização pela diferença deste com o valor da **prestação são meras convenções** adotadas pelos idealizadores dos sistemas usuais de amortização; porquanto, a Matemática Financeira considera o valor do empréstimo e as prestações para liquidá-lo, entradas e saídas de caixa, não importando se a título de juros ou amortização, que têm sentido, apenas, para **atender a questões fisco-contábeis**.

Entretanto, cabe ressaltar que, financeiramente, o valor da amortização nada mais é que o valor da prestação depois de desembutidos (descapitalizados) os juros e, conseqüentemente, o juro será a diferença entre a prestação e a respectiva amortização.

Além disso, é importante enfatizar que os saldos devedores são, também, o valor presente das parcelas vincendas (parcelas a pagar), **descapitalizadas de forma composta**, como se comprova:

$$SD_1 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^2} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^3} \Rightarrow 70.607,63$$

$$SD_2 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^2} \Rightarrow 49.276,02$$

$$SD_3 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} \Rightarrow 25.811,25$$

Cabe salientar, ainda, que os saldos devedores são, também, a diferença entre o valor do empréstimo e o valor presente das amortizações relativas às parcelas pagas, constituindo-se no saldo devedor na data zero, depois **capitalizado, de forma composta**, até a data pretendida, como se comprova:

$$SD_1 = \left[90.000 - \frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} \right] \times (1+10\%)^1 \Rightarrow 70.607,63$$

$$SD_2 = \left[90.000 - \left(\frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^2} \right) \right] \times (1+10\%)^2 \Rightarrow 49.276,02$$

$$SD_3 = \left[90.000 - \left(\frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^2} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^3} \right) \right] \times (1+10\%)^3 \Rightarrow 25.811,25$$

$$SD_4 = \left[90.000 - \left(\frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^2} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^3} + \frac{28.392,37}{(1+10\%)^4} \right) \right] \times (1+10\%)^4 \Rightarrow 0$$

Ressalte-se: depois de incorporados, somente liquidamos integralmente os juros quando liquidarmos o empréstimo. Caso contrário, sempre restarão juros nos saldos devedores; porquanto, pagamos, sempre, montantes (juros e amortização) e restam montantes (capital + juros).

É importante frisar, como se observa, que essas comprovações matemático-financeiras servem para qualquer sistema de amortização em que a taxa de juros incida sobre os saldos devedores. Entretanto, é oportuno lembrar que todos os saldos devedores, por não se encontrarem na data zero, contêm juros (VDT); **inclusive, nos sistemas de amortização em juros simples**; porém, por óbvio, nesses sistemas, **a taxa não incide** sobre esses saldos devedores e, sim, sobre as parcelas de capital (amortização).

Depois de ficar clarividente que os saldos devedores contêm juros; pois, são os montantes dos saldos devedores na data zero, vamos calcular os valores das **amortizações efetivamente realizadas**, tomando como base esses mesmos saldos devedores (montantes).

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da primeira prestação (SD_1), desincorporando os juros contidos, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira amortização. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, financeiramente, será o valor da primeira amortização, por óbvio:

$$A_1 = 90.000 - \frac{70.607,63}{(1+10\%)} \Rightarrow 25.811,25$$

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da segunda prestação (SD_2), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira e segunda amortizações. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, deduzindo a primeira amortização (A_1), financeiramente, será o valor da segunda amortização, e assim por diante:

$$A_2 = 90.000 - \frac{49.276,02}{(1+10\%)^2} - 25.811,25 \Rightarrow 23.464,77$$

$$A_3 = 90.000 - \frac{25.811,25}{(1+10\%)^2} - 25.811,25 - 23.464,77 \Rightarrow 21.331,61$$

Como o saldo devedor depois do pagamento da última prestação (SD_4) deve ser zero, o valor da quarta e última amortização será a diferença entre o valor do empréstimo e as amortizações anteriores:

$$A_4 = 90.000 - 25.811,25 - 23.464,77 - 21.331,61 \Rightarrow 19.392,37$$

Simples, assim: toda prestação é valor futuro e ao descapitalizarmos (desincorporarmos os juros), dividindo a prestação pelo fator de capitalização ou multiplicando pelo fator de descapitalização, estamos calculando a parcela de capital (amortização), **independentemente do sistema de amortização e do regime de capitalização**.

Além disso, aproveitando que todos já devem ter entendido que amortização é capital ou parte do capital (valor presente), é importante salientar que, ao descapitalizarmos o valor de cada prestação, desincorporando os respectivos juros, podemos obter os valores das **amortizações, efetivamente, realizadas**, ratificando os cálculos e resultados anteriores, por meio do saldo devedor. Por consequência, como em todo pagamento há juro e amortização, conclui-se que o valor correto do juro será a diferença entre o pagamento e amortização:

$$A_1 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^1} \Rightarrow 25.811,25 \quad \therefore J_1 = 28.392,37 - 25.811,25 \Rightarrow 2.581,12$$

$$A_2 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^2} \Rightarrow 23.464,77 \quad \therefore J_2 = 28.392,37 - 23.464,77 \Rightarrow 4.927,60$$

$$A_3 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^3} \Rightarrow 21.331,61 \quad \therefore J_3 = 28.392,37 - 22.539,44 \Rightarrow 7.060,76$$

$$A_4 = \frac{28.392,37}{(1+10\%)^4} \Rightarrow 19.392,37 \quad \therefore J_4 = 28.392,37 - 19.392,37 \Rightarrow 9.000,00$$

Destaque-se, que é, exatamente, o que ocorre quando liquidamos prestação (ões), antecipadamente.

Ressalte-se que os juros, também, podem ser calculados sobre o valor de cada amortização, ratificando que podemos considerar como se fossem 4 empréstimos distintos, cujos montante são os valores das prestações:

$$J_1 = 25.811,25 \times [(1+10\%)^1 - 1] \Rightarrow 2.581,12 \quad \therefore M_1 = 25.811,25 + 2.581,12 \Rightarrow 28.392,37$$

$$J_2 = 23.464,77 \times [(1+10\%)^2 - 1] \Rightarrow 4.927,60 \quad \therefore M_2 = 23.464,77 + 4.927,60 \Rightarrow 28.392,37$$

$$J_3 = 21.331,61 \times [(1+10\%)^3 - 1] \Rightarrow 7.060,76 \quad \therefore M_3 = 21.331,61 + 7.060,76 \Rightarrow 28.392,37$$

$$J_4 = 19.392,37 \times [(1+10\%)^4 - 1] \Rightarrow 9.000,00 \quad \therefore M_4 = 19.392,37 + 9.000,00 \Rightarrow 28.392,37$$

Fica muito claro, então, que realizar um único empréstimo de \$ 90.000,00, para liquidar quatro meses depois, à taxa de 10% ao mês, é o mesmo que realizar quatro empréstimos distintos de \$ 25.811,25, \$ 23.464,77, 21.331,61 e 19.392,37; porquanto, em ambos os casos, pagaremos quatro prestações mensais e iguais a \$ 28.392,37, qualquer que seja a data focal adotada, por se tratar de juros compostos, que exige o fracionamento de prazo e a cindibilidade, tanto do valor presente, como do valor futuro.

Em consequência, depois de obtidos, **financeiramente**, todos os elementos, revela-se muito simples montar a planilha de amortização do **SPCJC – Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos (VDT)**:

n	PGTO	JUROS	AMORT	DEVEDOR	FATOR JC
0				90.000,00	
1	28.392,37	2.581,12	25.811,25	70.607,63	0,90909091
2	28.392,37	4.927,60	23.464,77	49.276,02	0,82644628
3	28.392,37	7.060,76	21.331,61	25.811,25	0,75131480
4	28.392,37	9.000,00	19.392,37	0,00	0,68301346
Σ	113.569,49	23.569,49	90.000,00		3,16986545

Nota-se, com muita facilidade, que os valores de cada **amortização é resultado**, também, **da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**, como deve ocorrer em todos os sistemas de amortização, independentemente do regime de capitalização. Consequentemente, o valor do **juro é resultado**, também, **da multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo**.

Como se depreende, podemos considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do **SPCJC – Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos (VDT)**, como se ratifica na planilha seguinte, desdobrando os juros a cada período, calculados sobre o montante (capital + juros anteriores):

Empréstimos		VALOR DOS JUROS COMPOSTOS MENSAIS				Pagamentos		Saldo
Amortização		1	2	3	4	Σ Juros	Prestação	Devedor
0								90.000,00
1	25.811,25	2.581,12				2.581,12	28.392,37	75.000,00
2	23.464,77	2.346,48	2.581,12			4.927,60	28.392,37	50.000,00
3	21.331,61	2.133,16	2.346,48	2.581,12		7.060,76	28.392,37	25.000,00
4	19.392,37	1.939,24	2.133,16	2.346,48	2.581,12	9.000,00	28.392,37	0
Σ	90.000,00	9.000,00	7.060,76	4.927,60	2.581,12	23.569,49	113.569,49	

Fica patente, então, que podemos considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos – SPCJC, como se ratifica na planilha anterior, desdobrando os juros a cada período.

Como se verifica nessa correta planilha de amortização, \$ 9.000,00 correspondem, efetivamente, ao somatório dos juros do primeiro mês dos quatro empréstimos distintos e não ao juro do primeiro mês dos sistemas usuais de amortização, que calculam, **por convenção**, os juros sobre o saldo devedor anterior e os consideram, indevidamente, como liquidados,.

Fica muito claro, também, que realizar um único empréstimo de \$ 90.000,00, para liquidar quatro meses depois, à taxa de 10% ao mês, é o mesmo que realizar quatro empréstimos distintos de \$ 25.811,25, \$ 23.464,77, 21.331,61 e 19.392,37; porquanto, em ambos os casos, pagaremos quatro prestações mensais e iguais a \$ 28.392,37, qualquer que seja a data focal adotada, zerando a dívida, diferentemente do equivocado Sistema Alemão de Amortização.

Por conseguinte, se tomarmos \$ 100.000,00 e dermos uma entrada de \$ 10.000,00 e pagarmos o saldo em quatro prestações mensais e iguais a \$ 28.392,37, a taxa efetivamente paga será, rigorosamente, igual à taxa contratada de 10% ao mês ou, de outra forma, o valor presente da entrada, somada aos pagamentos, descontados à taxa contratada de 10% ao mês, será, rigorosamente, igual ao valor do empréstimo, ratificando a concretude e acurácia da equivalência financeira do Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos – SPCJC, como sói acontecer!

Portanto, considerar o pagamento inicial como juros antecipados e não como entrada (amortização), como aliás, é evidente no fluxo de caixa e na prática, sem deduzi-lo do valor do financiamento para calcular o valor das prestações constantes, saltam aos olhos duas únicas alternativas: ou se trata de ignorância financeira ou de desonestidade intelectual!

Certamente, caso persista a negação à ciência exata, depois de todas as comprovações científicas, detalhadas e exaustivamente demonstradas, restará, apenas, a segunda alternativa que, indubitavelmente, caracterizará um crime financeiro contra a Matemática, enquanto ciência exata!

Finalizando, depois de todas as comprovações científicas, detalhadas e exaustivamente demonstradas, só se pode concluir que o **Sistema Alemão de Amortização**, na forma como foi idealizado, financeiramente, é imprestável, devendo, peremptoriamente, ser descartado.

Eu, como professor de matemática financeira, enquanto ciência exata que trata do valor do dinheiro no tempo, há meio século, tenho o **dever de zelar pelo rigor científico!**

Parafraseando Albert Einstein, a Matemática Financeira, enquanto ciência exata, não mente!

AULA ENCERRADA!

Referências:

SANDRINI, Jackson Ciro. **Sistemas de amortização de empréstimos e a capitalização de juros: análise dos impactos financeiros e patrimoniais**. Dissertação: Mestrado em Contabilidade e Finanças. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

Disponível: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/13709>

SANDRINI, Jackson Ciro; CHEROBIM, Ana Paula M. S. **Capitalização de juros em renegociação de dívidas: sistemas de amortização**. Curitiba, Juruá Editora, 2013.

SANDRINI, Jackson Ciro. **Matemática Financeira aplicada aos negócios**. Curitiba, Juruá Editora, 2022.

SANDRINI, Jackson Ciro. **Anatocismo e a Tabela Price: de uma vez por todas!** Curitiba, 17/07/19.
Disponível: www.apepar.org.br/wp-content/uploads/2019/08/DE-UMA-VEZ-POR-TODAS.pdf

SANDRINI, Jackson Ciro. **Anatocismo e os negacionistas de uma ciência exata!** Curitiba, 05/03/25.
Disponível: www.apepar.org.br/wp-content/uploads/2025/03/ANATOCISMO-E-OS-NEGACIONISTAS-DE-UMA-CIENCIA-EXATA.pdf

SANDRINI, Jackson Ciro. **Método de Gauss: um sistema de amortização, financeiramente, imprestável!** Curitiba, 17/07/25.
Disponível: www.apepar.org.br/wp-content/uploads/2025/08/ARTIGO_SANDRINI_GAUSS.pdf

SANDRINI, Jackson Ciro. **Anatocismo e o Sistema de Amortização Constante - SAC: de uma vez por todas!**
Disponível: www.apepar.org.br/wp-content/uploads/2025/11/ANATOCISMO-E-O-SISTEMA-DE-AMORTIZACAO-CONSTANTE-SAC-DE-UMA-VEZ-POR-TODAS.pdf