

MÉTODO DE GAUSS: UM SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO, FINANCEIRAMENTE, IMPRESTÁVEL.

17/07/2025 - Professor Msc. Jackson Ciro Sandrini – jcsandrini@ufpr.br

Quando nos referimos a questões financeiras, estamos falando em dinheiro, que tem valor diferente no tempo (VDT) e quem trata muito bem dessa matéria é a Matemática Financeira, **enquanto ciência exata**, cujo objetivo precípua é estudar as formas de evolução do dinheiro no tempo, nos investimentos e empréstimos/descontos, em geral: transportar valores a presente e a futuro, sob uma taxa de juros, por **determinado prazo**, conforme certo regime de capitalização.

Existem dois regimes básicos de capitalização dos juros: simples e composto, que são mutuamente excludentes, e destacam a forma como os juros são calculados e incorporados ao capital, no decorrer do tempo: por um ou mais períodos. É importante deixar claro que capitalizar juros significa **incorporar juros ao capital**, podendo a taxa incidir sobre esse montante (composto) ou somente sobre o capital (simples). Por conseguinte, como existem dois regimes de capitalização, que fique claro: juro capitalizado não é sinônimo de juro composto (juros sobre juros).

Dizemos simples porque a base da incidência da taxa é simples, formada por um único valor, na data zero, denominado capital ou valor presente. Os juros simples exigem um único período de capitalização e vencem a termo: **são incorporados ao capital uma única vez**, no vencimento, e não admitem, por consequência, fracionamento de prazo para formar base de cálculo de novos juros. Frise-se: **o valor presente e o valor futuro não são cindíveis**, como se confirma, pelas suas tão conhecidas fórmulas de cálculo:

$$M = C \times (1 + i \times n) \quad \rightarrow \quad C = \frac{M}{C \times (1 + i \times n)}$$

Observando as fórmulas, é cristalino e fica deveras fácil comprovar que, independentemente da taxa e do número de períodos, os juros simples são incorporados ao capital ou desincorporados do montante uma única vez: **o capital e montante não são cindíveis e não admitem fracionamento de prazo**. Portanto, não há como realizar um único empréstimo para ser liquidado em mais de um pagamento. Simples, assim!

Dizemos composta porque a base da incidência da taxa é composta, formada não somente pelo capital; mas, também, pelos juros formados nos períodos anteriores de capitalização. Os juros compostos exigem mais de um período de capitalização para que a taxa de juros tenha a possibilidade de incidir sobre os juros vencidos e não pagos ou resgatados, parcial ou totalmente: **são incorporados ao capital, periodicamente**, de acordo com a taxa e o número de períodos de capitalização.

Portanto, não vencem a termo e exigem mais de um período de capitalização: o fracionamento de prazo ou a cindibilidade do capital e montante, com a taxa incidindo sobre o saldo (montante), juros sobre juros, são o fundamento da capitalização composta. Frise-se: **o valor presente e o valor futuro são, obrigatoriamente, cindíveis**, como se confirma, pelas suas tão conhecidas fórmulas de cálculo:

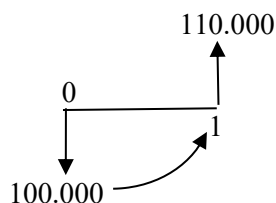
$$M = C \times (1 + i)^n \quad \rightarrow \quad C = \frac{M}{C \times (1 + i)^n}$$

Observando as fórmulas, é cristalino e fica deveras fácil comprovar que, independentemente da taxa e do número de períodos, os juros compostos **são incorporados ao capital ou desincorporados do montante, periodicamente**: o capital e montante são, obrigatoriamente, cindíveis, bem como o fracionamento de prazo, para que haja a possibilidade de os juros incidirem, sobre os juros vencidos e não pagos ou sacados

Exemplo 1: Para deixar mais clarividente, ainda, vamos adotar o seguinte exemplo: calcular o valor do pagamento de um empréstimo de \$ 100.000,00, a juros simples de 10% ao mês, depois de 1 mês:

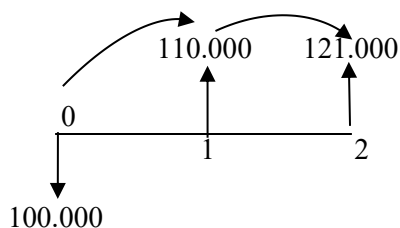
$$M = 100.000 \times (1 + 10\% \times 1) \quad \rightarrow \quad p = 110.000,00$$

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas de caixa. Para o tomador, o valor do empréstimo é entrada e o respectivo pagamento saída. Simples, assim!



Exemplo 1.1: Se, no vencimento, o devedor propõe liquidar a dívida um mês depois, qual deverá ser o valor desse pagamento?

Pelo equivocado conceito, em que permite o fracionamento de prazo e a cindibilidade do valor presente, teríamos:



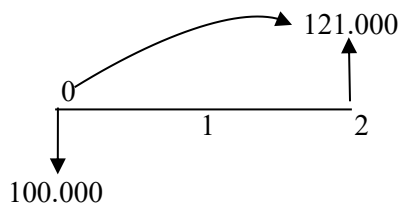
$$p = 100.000,00 \times (1 + 10\% \times 1) \times (1 + 10\% \times 1) \rightarrow p = 121.000,00$$

Por certo, não faz nenhum sentido; porquanto, estaríamos fracionando o prazo e cindindo o capital, ao incidir a taxa sobre um valor que já contém juros (montante), descaracterizando a capitalização simples.

De fato, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, 2 meses depois, \$ 121.000,00, a taxa mensal de juros simples será diferente da taxa contratada, ratificando que o empréstimo não foi realizado a juros simples; conseqüentemente, como há somente dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, foi realizado a juros compostos:

$$121.000 = 100.000 \times (1 + i_m \times 2) \rightarrow \text{taxa mensal} = 10,50\%$$

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas de caixa. Para o tomador, o valor do empréstimo é entrada e o respectivo pagamento saída. Simples, assim!

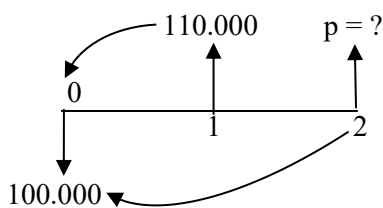


Portanto, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, dois meses depois, \$ 121.000,00, obedecendo ao fracionamento de prazo e cindibilidade do valor presente, a taxa mensal de **juros compostos** será, rigorosamente, igual à taxa contratada,

$$100.000,00 \times (1 + i_m)^2 = 121.000 \rightarrow \text{Taxa mensal} = 10,00\%$$

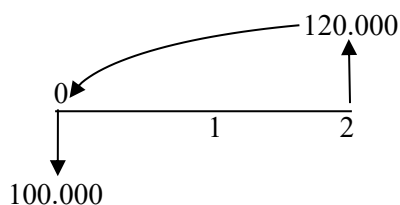
Lembrando: $(1+i)^n$ ou, simplesmente, i^n , com $n > 1$, caracteriza **juros sobre juros: composto**.

Ao procedermos o cálculo de forma correta, obedecendo ao **não** fracionamento de prazo e cindibilidade do valor presente, por se tratar de **capitalização simples**, a equivalência deverá ser, obrigatoriamente, realizada, na data focal zero:



$$110.000,00 / (1+10\% \times 1) = p / (1+ 10\% \times 2) \rightarrow p = 120.000,00$$

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas de caixa. Para o tomador, o valor do empréstimo é entrada e o respectivo pagamento saída. Simples, assim!



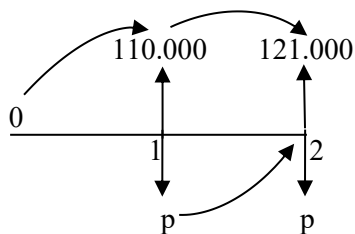
Por conseguinte, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, 2 meses depois, \$ 120.000,00, a taxa mensal de juros simples será, rigorosamente, igual à taxa mensal contratada, ratificando a concretude e acurácia da equivalência na data zero:

$$100.000,00 \times (1 + i_m \times 2) = 120.000,00 \rightarrow \text{Taxa mensal} = 10,00\%$$

Fica evidente, mais uma vez, que não podemos fracionar o prazo; porquanto, o valor presente e o valor futuro, na capitalização simples, não são cindíveis. É impossível ignorar que a diferença de \$ 1.000,00 entre os valores futuros se dá em razão de **os juros** de 10% **incidirem sobre os juros** anteriores de \$ 10.000,00, descaracterizando a capitalização simples. De modo intelectual honesto, não há como refutar tais cálculos!

Exemplo 1.2: Se, no vencimento, o devedor propõe liquidar a dívida em dois pagamentos mensais e iguais, com o primeiro de imediato e o outro um mês depois, qual deverá ser o valor desses pagamentos?

Pelo equivocado conceito, em que permite o fracionamento de prazo e a cindibilidade do valor presente, teríamos:



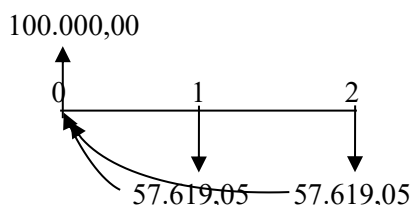
$$p = 100.000,00 \times (1+10\% \times 1) \times (1+10\% \times 1) = p \times (1+10\% \times 1) + p \rightarrow p = 121.000,00 / 2,10 \rightarrow 57.619,05$$

Por certo, não faz nenhum sentido; porquanto, estaríamos fracionando o prazo ao incidir a taxa de juros sobre valores que já contêm juros (montante), descaracterizando a capitalização simples.

De fato, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos \$ 57.619,05 em um mês e \$ 57.619,05 em dois meses, a taxa mensal de juros simples será diferente da taxa contratada, ratificando que o empréstimo não foi realizado a

juros simples; consequentemente, como há somente dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, foi realizado a juros compostos:

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas de caixa. Para o tomador, o valor do empréstimo é entrada e os respectivos pagamentos saídas. Simples, assim!

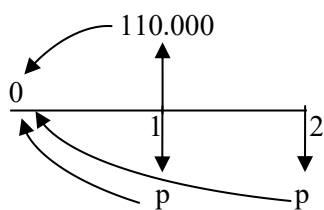


$$57.619,05 / (1 + i_m \times 1) + 57.619,05 / (1 + i_m \times 2) = 100.000,00 \rightarrow \text{taxa mensal} = 10,312\%$$

Entretanto,, obedecendo ao fracionamento de prazo e cindibilidade do valor presente, a taxa mensal de **juros compostos** será, rigorosamente, igual à taxa contratada,

$$57.619,05 \div (1 + i_m)^1 + 57.619,05 \div (1 + i_m)^2 = 100.000,00 \rightarrow \text{taxa mensal} = 10,00\%$$

Ao procedermos o cálculo de forma correta, obedecendo ao **não** fracionamento de prazo e cindibilidade do valor presente, a equivalência deverá ser realizada na data focal zero, por se tratar de **capitalização simples**:



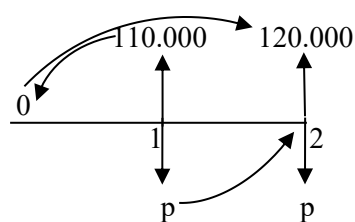
$$p = 110.000,00 / (1+10\% \times 1) = p / (1+10\% \times 1) + p / (1+10\% \times 2) \rightarrow p = 57.391,30$$

Por conseguinte, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos \$ 57.391,30 em um mês e \$ 57.391,30 em dois meses, a taxa mensal de juros simples será, rigorosamente, igual à taxa mensal contratada, ratificando a concretude e acurácia da equivalência na data zero:

$$p = 110.000,00 / (1+ i_m \times 1) = 57.391,30 / (1+ i_m \times 1) + 57.391,30 / (1+ i_m \times 2) \rightarrow \text{Taxa mensal} = 10,00\%$$

Fica evidente, mais uma vez, que não podemos fracionar o prazo, na capitalização simples; porquanto, o valor presente e o valor futuro não são cindíveis. É impossível ignorar que, ao fazermos a equivalência em outra data que não seja a data focal zero, a taxa de juros incidirá sobre valores que já contêm juros: montante, descaracterizando a capitalização simples. De modo intelectual honesto, não há como refutar tais cálculos!

Cabe destacar que o Método de Gauss realiza, equivocadamente, a equivalência na data 2 (n); porém, estranhamente, descapitaliza o montante de \$ 110.000,00 para data zero, para depois proceder à equivalência na data 2, como se demonstra:

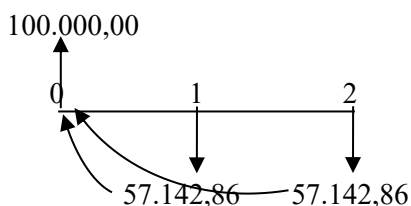


$$110.000 / (1+10\% \times 1) \times (1+10\% \times 2) = p \times (1+10\% \times 1) + p \rightarrow p = 57.142,86$$

Por certo, não faz nenhum sentido; porquanto, estaríamos fracionando o prazo ao incidir a taxa de juros sobre a 1º pagamento, que já contém juros (montante), da data zero até à data 1, descaracterizando a capitalização simples.

De fato, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos \$ 57.142,86 em um mês e \$ 57.142,86 em dois meses, a taxa mensal de juros simples será diferente da taxa contratada, ratificando que o empréstimo não foi realizado a juros simples; conseqüentemente, como há somente dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, foi realizado a juros compostos:

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas de caixa. Para o tomador, o valor do empréstimo é entrada e os respectivos pagamentos saídas. Simples, assim!



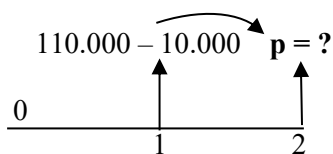
$$57.142,86 \div (1 + i_m \times 1) + 57.142,86 \div (1 + i_m \times 2) = 100.000,00 \rightarrow \text{taxa mensal} = 9,66\%$$

Considerando que a taxa de juros simples é inferior à contratada, conclui-se que essas duas parcelas mensais e iguais a \$ 57.142,86, se descontadas à taxa contratada de 10% ao mês, não liquidam o empréstimo de \$ 100.000,00 e, sim, somente \$ 99.567,10, restando saldo a pagar no valor de \$ 432,90, beneficiando o devedor e penalizando o credor: financeiramente, lamentável!

Fica clarividente, que o Método de Gauss não exprime consistência científica ao realizar a equivalência em data diferente da data zero, fracionando o prazo e cindindo o valor presente, simplesmente, não admitidos na capitalização simples.

Exemplo 1.3: Se, no vencimento, o devedor propõe liquidar a dívida por meio de um **pagamento** imediato de \$ 10.000,00 e o saldo um mês depois, qual deverá ser o valor desse segundo pagamento?

Pelo equivocado conceito, em que permite o fracionamento de prazo e a cindibilidade do valor presente, teríamos:



$$p = (110.000,00 - 10.000,00) \times (1 + 10\% \times 1) \rightarrow p = 110.000,00$$

Infelizmente, boa parte das pessoas, incluindo renomados professores, concluem, equivocadamente, que ao pagarmos \$ 10.000,00 estamos liquidando os juros. De fato, em razão da coincidência de valores, **passa a ilusão** de que estaríamos liquidando os juros; porém, cabe destacar que, depois de incorporados, os juros serão totalmente liquidados somente quando se liquida a operação, como se ratifica, algebricamente:

Aplicando a propriedade distributiva na equação de valor anterior, teremos:

$$p = 100.000,00 \times (1 + 10\%)^2 - 10.000,00 \times (1 + 10\%) \rightarrow p = 110.000,00$$

Ratificando: $(1+i)^n$ ou, simplesmente, i^n , com $n > 1$, caracteriza juros sobre juros: composto.

Lembremos: os juros, depois de incorporados, tornam-se um único corpo, formado de capital e juros. Ao pagarmos parte, estamos pagando um pedaço desse corpo, conseqüentemente, parte de juros e parte de capital. Portanto, facilmente se conclui: pagamos sempre montantes e restarão sempre montantes, até a liquidação total. Portanto, não há brechas para quaisquer tipos de narrativa falaciosas!

Saliente-se: em todo pagamento, em data diferente da data 0, sempre há juros e capital (amortização), não necessariamente nesta mesma ordem! Então, no pagamento de \$ 10.000,00 há juros e amortização.

Por certo, não faz nenhum sentido utilizar a data focal 2 como referência para realizar a equivalência; porquanto, estaríamos incidindo a taxa de juros sobre um valor que já contém juros vencidos, mesmo que parcialmente, descaracterizando a capitalização simples.

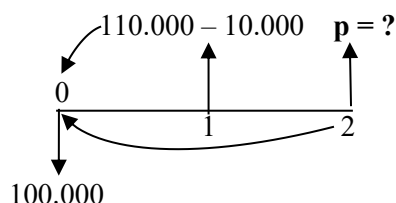
De fato, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, \$ 10.000,00 um mês depois e \$ 110.000,00 em 2 meses, a taxa mensal de juros simples será diferente da taxa contratada, ratificando que o empréstimo não foi realizado a juros simples; conseqüentemente, como há somente dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, foi realizado a juros compostos:

$$10.000,00 / (1 + i_m \times 1) \times 110.000,00 / (1 + i_m \times 2) = 100.000,00 \rightarrow \text{taxa mensal} = 10,474\%$$

Entretanto, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, \$ 10.000,00 um mês depois e \$ 110.000,00 em 2 meses, a taxa mensal de **juros compostos** será, rigorosamente, igual à taxa mensal contratada,

$$10.000,00 / (1 + i_m)^1 \times 110.000,00 / (1 + i_m)^2 = 100.000,00 \rightarrow 10,00\%$$

Procedendo ao cálculo de forma correta, **não** fracionando o prazo ou cindindo o capital, a equivalência deverá ser realizada na data focal zero, por se tratar de **capitalização simples**:



$$\frac{110.000 - 10.000}{(1 + 10\% \times 1)} = \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)}$$

$$\frac{110.000}{(1 + 10\% \times 1)} - \frac{10.000}{(1 + 10\% \times 1)} = \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)} \Rightarrow p = 109.090,91$$

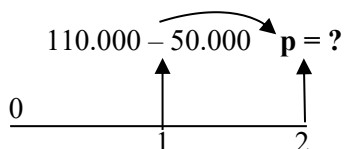
Por conseguinte, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, \$ 10.000,00 um mês depois e \$ 109.090,91 em 2 meses, a taxa mensal de **juros simples** paga pelo empréstimo será, rigorosamente, igual à taxa contratada, ratificando a concretude e acurácia da equivalência na data zero e, por conseguinte, dos cálculos:

$$10.000,00 / (1 + i_m \times 1) + 109.090,91 / (1 + i_m \times 2) = 100.000,00 \rightarrow \text{Taxa mensal} = 10,00\%$$

Fica evidente, mais uma vez, que não podemos fracionar o prazo; porquanto o valor presente e o valor futuro, na capitalização simples, não são cindíveis. Além disso, é importante lembrar: todo valor que não está na data zero, sempre contém juros e capital (amortização). Não é uma questão de escolha e, sim, financeira: valor do dinheiro no tempo (VDT). Portanto, de modo intelectual honesto, não há como refutar tais conceitos e cálculos!

Exemplo 1.4: Se, no vencimento, o devedor propõe liquidar a dívida por meio de um **pagamento** imediato de \$ 50.000,00 e o saldo um mês depois, qual deverá ser o valor do segundo pagamento?

Pelo equivocado conceito, em que permite o fracionamento de prazo e a cindibilidade do valor presente, teríamos:



$$p = (110.000,00 - 50.000,00) \times (1 + 10\% \times 1) \rightarrow p = 66.000,00$$

Infelizmente, boa parte das pessoas, incluindo renomados professores, concluem que, ao pagarmos \$ 50.000,00, estaríamos liquidando os juros de \$ 10.000,00,00 e amortizando \$ 40.000,00. De fato, em razão da coincidência de valores, **passa a ilusão** de que estaríamos liquidando os juros; porém, cabe destacar que, depois de incorporados, os juros serão integralmente liquidados somente quando se liquida o empréstimo, como se ratifica, algebricamente:

Aplicando a propriedade distributiva na equação de valor anterior, teremos:

$$p = 100.000,00 \times (1 + 10\%)^2 - 50.000 \times (1 + 10\%) \rightarrow p = 66.000,00$$

Ratificando: $(1+i)^n$ ou, simplesmente i^n , com $n > 1$ caracteriza juros sobre juros: composto.

É muito importante observar na equação de valor que, qualquer que seja o valor do pagamento parcial, sempre acarretará juros sobre juros: $(1+i)^2$ e somente não acarretará quando o valor do pagamento for igual ao valor da dívida, ou seja, se liquidarmos integralmente a dívida, ao final de um período.

Lembremos, mais uma vez: os juros, depois de incorporados, tornam-se um único corpo, formado de capital e juros. Ao pagarmos parte, estamos pagando um pedaço desse corpo, conseqüentemente, parte de juros e parte de capital. Então, facilmente se conclui, que pagamos sempre montantes e restarão sempre montantes, até a liquidação total. Honestamente, não há brechas para quaisquer tipos de devaneios!

Por certo, não faz nenhum sentido realizar o cálculo dessa forma, utilizando a data focal 2 como referência; porquanto, estaríamos incidindo a taxa de juros sobre um valor que já contém juros (montante), descaracterizando a capitalização simples.

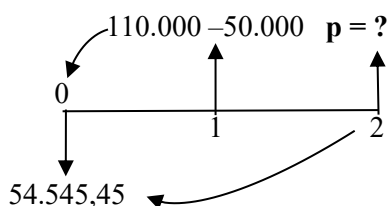
De fato, se tomamos \$ 100.000,00, a 10% ao mês, e pagarmos, \$ 50.000,00 um mês depois e \$ 66.000,00 em 2 meses, a taxa mensal de juros simples paga pelo empréstimo será diferente da taxa contratada, ratificando que o empréstimo não foi realizado a juros simples; conseqüentemente, como há somente dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, foi realizado a juros compostos:

$$50.000,00 / (1 + i_m \times 1) + 66.000,00 / (1 + i_m \times 2) = 100.000,00 \rightarrow \text{taxa mensal} = 10,343\%$$

Entretanto, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, \$ 50.000,00 um mês depois e \$ 66.000,00 em 2 meses, a taxa mensal de **juros compostos** será, rigorosamente, igual à taxa mensal contratada,

$$50.000 / (1 + i_m)^1 + 66.000 / (1 + i_m)^2 = 100.000 \rightarrow 10,00\%$$

Ao procedermos o cálculo de forma correta, **não** fracionando o prazo ou cindindo o capital, a equivalência deverá ser realizada na data focal zero, por se tratar de **capitalização simples**:



$$\frac{110.000 - 50.000}{(1 + 10\% \times 1)} = \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)}$$

$$\frac{110.000}{(1 + 10\% \times 1)} - \frac{50.000}{(1 + 10\% \times 1)} = \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)} \Rightarrow 65.454,55$$

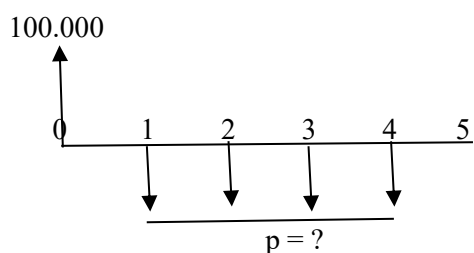
Por conseguinte, se tomamos \$ 100.000,00 e pagarmos, \$ 50.000,00 um mês depois e \$ 65.454,55 em 2 meses, a taxa mensal de **juros simples** paga pelo empréstimo será, rigorosamente, igual à taxa contratada, ratificando a concretude e acurácia da equivalência na data zero:

$$50.000,00 / (1 + i_m \times 1) + 65.454,55 / (1 + 10\% \times 2) = 100.000,00 \rightarrow \text{Taxa mensal} = 10,00\%$$

Fica evidente, mais uma vez, que não podemos fracionar o prazo; porquanto o valor presente e o valor futuro, na capitalização simples, não são cindíveis. Além disso, é importante relembrar: todo valor que não está na data zero, sempre contém juros e capital (amortização). Não é uma questão de escolha e, sim, financeira (VDT). Simplesmente, não há como pagar somente os juros: sempre pagamos capital e juros: isso é fundamento! De forma intelectual honesta, não há como refutar tais cálculos!

Exemplo 2: Para deixar mais clarividente, ainda, vamos adotar o seguinte exemplo: calcular o valor de 4 prestações mensais e iguais, sem entrada, para liquidar um empréstimo de \$ 100.000,00, a juros simples de 10% ao mês, utilizando as datas focais zero, um, dois, três, quatro e cinco:

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas. Para o tomador de empréstimo, o valor do empréstimo (entrada) e os respectivos pagamentos (saídas). Simples, assim!



DATA FOCAL 0 – VP DE SÉRIE POSTECIPADA

$$100.000 = \frac{p}{(1 + 10\% \times 1)} + \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)} + \frac{p}{(1 + 10\% \times 3)} + \frac{p}{(1 + 10\% \times 4)}$$

$$100.000 = p \times \left[\frac{1}{1,10} + \frac{1}{1,20} + \frac{1}{1,30} + \frac{1}{1,40} \right] \Rightarrow 30.998,71$$

DATA FOCAL 1

$$100.000 \times (1 + 10\% \times 1) = p + \frac{p}{(1 + 10\% \times 1)} + \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)} + \frac{p}{(1 + 10\% \times 3)}$$

$$110.000 = p \times \left[1 + \frac{1}{1,10} + \frac{1}{1,20} + \frac{1}{1,30} \right] \Rightarrow p = 31.324,26$$

DATA FOCAL 2

$$100.0000 \times (1 + 10\% \times 2) = p \times (1 + 10\% \times 1) + p + \frac{p}{(1 + 10\% \times 1)} + \frac{p}{(1 + 10\% \times 2)}$$

$$120.000 = p \times \left[1,10 + 1 + \frac{1}{1,10} + \frac{1}{1,20} \right] \Rightarrow p = 31.230,28$$

DATA FOCAL 3

$$100.000 \times (1 + 10\% \times 3) = p \times (1 + 10\% \times 2) + p \times (1 + 10\% \times 1) + p + \frac{p}{(1 + 10\% \times 1)}$$

$$130.000 = p \times \left[1,20 + 1,10 + 1 + \frac{1}{1,10} \right] \Rightarrow p = 30.885,53$$

DATA FOCAL 4 - VF DE SÉRIE POSTECIPADA

$$100.000 \times (1 + 10\% \times 4) = p \times (1 + 10\% \times 3) + p \times (1 + 10\% \times 2) + p \times (1 + 10\% \times 1) + p$$

$$140.000 = p \times [1,30 + 1,20 + 1,10 + 1] \Rightarrow p = 30.434,78$$

DATA FOCAL 5 - VF DE SÉRIE ANTECIPADA

$$100.000 \times (1 + 10\% \times 5) = p \times (1 + 10\% \times 4) + p \times (1 + 10\% \times 3) + p \times (1 + 10\% \times 2) + p \times (1 + 10\% \times 1)$$

$$150.000 = p \times (1,4) + p \times (1,3) + p \times (1,2) + p \times (1,1) \Rightarrow p = 30.000,00$$

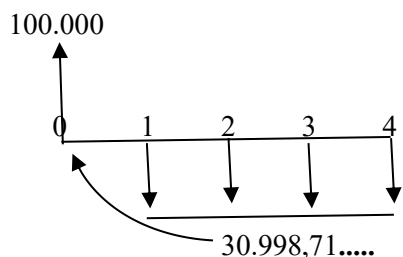
Caso fosse possível o fracionamento de prazo ou cindibilidade do valor do empréstimo na capitalização simples, teríamos n alternativas para escolha das datas focais. Em nosso exemplo adotamos seis alternativas e, como se observa nos resultados, à medida que aumentamos as datas focais, o valor dos pagamentos diminui, beneficiando cada vez mais o devedor e prejudicando o credor. Então, a escolha da alternativa seria por meio do “joquem pô”, “par ou ímpar”, “jogo do palito” ou qualquer outro jogo de sorte ou azar?

Os idealizadores do Método de Gauss escolheram, equivocadamente, a data focal do valor futuro de série postecipada – data intermediária 4, conseguindo prejudicar tanto o credor, como o devedor, que teriam escolhido, por óbvio, o maior e menor valor, respectivamente, ratificando que esse sistema não exprime consistência científica, sendo, portanto, financeiramente, imprestável. É, simplesmente, surreal!

Entretanto, como a questão é financeira, a matemática, enquanto ciência exata, resolve e, matematico-financeiramente dará uma única resposta, como sói acontecer! Como se percebe nas seis equações de valor ou em quaisquer outras datas focais que sejam escolhidas, a única alternativa em que não há incidência da taxa de juros sobre um valor que já contém juro, da data zero até a data de cada prestação, é a primeira, com a equivalência na data correta: data focal zero. De modo honesto, na capitalização simples, não há margem para sofismas! Pelo amor à ciência exata, não insistam em descabidas narrativas, utilizando outras datas para proceder à equivalência na capitalização simples!

Para ratificar, vamos considerar o empréstimo de \$ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, nas seis datas focais consideradas, e calcular as taxas mensais de juros simples pagas pelo empréstimo, nos respectivos fluxo de caixa.

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas. Para o tomador de empréstimo, o valor do empréstimo (entrada) e os respectivos quatro pagamentos (saídas). Simples, assim!



$$100.000,00 = \frac{30.998,71}{(1+i_m\% \times 1)} + \frac{30.998,71}{(1+i_m\% \times 2)} + \frac{30.998,71}{(1+i_m\% \times 3)} + \frac{30.998,71}{(1+i_m\% \times 4)} \Rightarrow 10,00\%$$

$$100.000,00 = \frac{31.324,26}{(1+i_m\% \times 1)} + \frac{31.324,26}{(1+i_m\% \times 2)} + \frac{31.324,26}{(1+i_m\% \times 3)} + \frac{31.324,26}{(1+i_m\% \times 4)} \Rightarrow 10,56\%$$

$$100.000,00 = \frac{31.230,28}{(1+i_m\% \times 1)} + \frac{31.230,28}{(1+i_m\% \times 2)} + \frac{31.230,28}{(1+i_m\% \times 3)} + \frac{31.230,28}{(1+i_m\% \times 4)} \Rightarrow 10,40\%$$

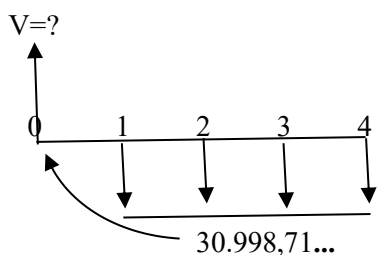
$$100.000,00 = \frac{30.885,53}{(1+i_m\% \times 1)} + \frac{30.885,53}{(1+i_m\% \times 2)} + \frac{30.885,53}{(1+i_m\% \times 3)} + \frac{30.885,53}{(1+i_m\% \times 4)} \Rightarrow 9,80\%$$

$$100.000,00 = \frac{30.434,78}{(1+i_m\% \times 1)} + \frac{30.434,78}{(1+i_m\% \times 2)} + \frac{30.434,78}{(1+i_m\% \times 3)} + \frac{30.434,78}{(1+i_m\% \times 4)} \Rightarrow 9,03\%$$

$$100.000,00 = \frac{30.000,00}{(1+i_m\% \times 1)} + \frac{30.000,00}{(1+i_m\% \times 2)} + \frac{30.000,00}{(1+i_m\% \times 3)} + \frac{30.000,00}{(1+i_m\% \times 4)} \Rightarrow 8,29\%$$

Como se percebe, a única alternativa em que a taxa mensal se iguala à taxa contratada é a primeira, com a data focal zero; porquanto, é a única data em que a taxa de juros incide apenas sobre o capital, não fracionando o prazo ou cindindo o valor do empréstimo, diferentemente das outras datas focais, em que a taxa incide sobre valores que contêm juros (montante), da data zero até à data de cada pagamento, razão de taxas diferentes em cada data focal adotada, maiores e menores, inclusive. Simples assim!

Para ratificar, de outra forma, vamos calcular o valor do empréstimo, liquidado em quatro prestações mensais e iguais, a juros simples de 10% ao mês, conforme o fluxo de caixa em cada data focal:



$$VP = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 2)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 3)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 100.000,00$$

$$VP = \frac{31.324,26}{(1+10\% \times 1)} + \frac{31.324,26}{(1+10\% \times 2)} + \frac{31.324,26}{(1+10\% \times 3)} + \frac{31.324,26}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 101.050,21$$

$$VP = \frac{31.230,28}{(1+10\% \times 1)} + \frac{31.230,28}{(1+10\% \times 2)} + \frac{31.230,28}{(1+10\% \times 3)} + \frac{31.230,28}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 100.747,04$$

$$VP = \frac{30.885,53}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.885,53}{(1+10\% \times 2)} + \frac{30.885,53}{(1+10\% \times 3)} + \frac{30.885,53}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 99.634,89$$

$$VP = \frac{30.434,78}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.434,78}{(1+10\% \times 2)} + \frac{30.434,78}{(1+10\% \times 3)} + \frac{30.434,78}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 98.180,80$$

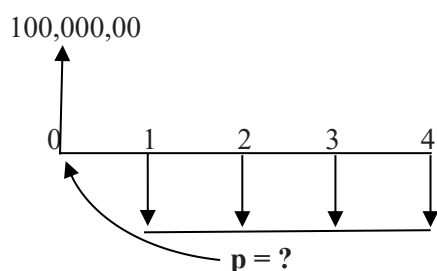
$$VP = \frac{30.000,00}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.000,00}{(1+10\% \times 2)} + \frac{30.000,00}{(1+10\% \times 3)} + \frac{30.000,00}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 96.778,22$$

Como se percebe, a única alternativa em que o valor presente se iguala ao valor do empréstimo é a primeira, com a data focal zero; porquanto, é a única data em que a taxa de juros incide apenas sobre o capital, não fracionando o prazo ou cindindo o valor do empréstimo, diferentemente das outras datas focais, em que a taxa incide sobre valores que contêm juros (montante), da data zero até à data de cada pagamento, razão de valores presentes diferentes em cada data focal adotada, maiores e menores, inclusive.. Simples assim!

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE – FRANCÊS (PRICE)

Adotando o mesmo exemplo de um empréstimo de \$ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, sem entrada, à taxa de juros compostos de 10% ao mês, elaborar a planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



Como vimos, exaustivamente, na capitalização composta, em razão da obrigatoriedade do fracionamento do prazo e cindibilidade do valor presente ou futuro, **podemos calcular o valor da prestação utilizando quaisquer datas focais**, sendo as mais comuns as datas **zero e n** (postecipada), por meio das seguintes formas:

$$p = VP \div \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+i)^j} \Rightarrow p = VF \times \frac{i}{[(1+i)^n - 1]} \Rightarrow p = VP \times \frac{[(1+i)^n \times i]}{[(1+i)^n - 1]}$$

Então, calculando o valor da prestação constante, teremos:

$$p = \frac{100.000}{3,169865} \Rightarrow 100.000 \times \frac{10\%}{[(1+10\%)^4 - 1]} \Rightarrow 100.000 \times \frac{[(1+10\%)^4 \times 10\%]}{[(1+10\%)^4 - 1]} = 31.547,08$$

Nesse referido Sistema Francês de Amortização– Price, depois de obtido o valor da prestação mensal constante, calculamos, **por convenção**, o juro, por meio da incidência da taxa periódica sobre o saldo devedor anterior, a amortização pela diferença entre a prestação e o respectivo juro e, por fim, o saldo devedor pela diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, para depois elaboramos a planilha:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR
0				100.000,00
1	31.547,08	10.000,00	21.547,08	78.452,92
2	31.547,08	7.845,29	23.701,79	54.751,13
3	31.547,08	5.475,11	26.071,97	28.679,16
4	31.547,08	2.867,92	28.679,16	0,00
Σ	126.188,32	26.188,32	100.000,00	

Contudo, caso o devedor decida pagar a primeira prestação um mês antes, certamente, o credor jamais aceitará retirar \$ 10.000,00 de juros e receber \$ 21.547,08; porquanto, os juros contidos na primeira prestação não são esses **calculados por convenção** e, sim, \$ 2.867,92, o último (quarto), e o credor deverá receber o valor correto de \$ 28.679,16, demonstrando que o Sistema Francês de Amortização, financeiramente, é imperfeito quando da separação da prestação em juros e amortização; porém, cabe salientar, que a separação da prestação em juros e amortização serve, apenas, para atender à uma questão fisco-contábil.

Então, como se constata, ao adotarem a **convenção de calcular os juros exigidos sobre o saldo devedor anterior e considerá-los totalmente pagos, incorrem num grave erro conceitual**; pois, o valor desses **juros exigidos** ocorre de forma invertida aos **juros devidos**, calculados, corretamente por equivalência financeira e, embora não altere o fluxo de caixa (prestações e saldos devedores), os **juros exigidos** nos sistemas usuais de amortizações não expressam a realidade e se tornam, financeiramente, insustentáveis, ao longo do tempo!

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE EM JUROS COMPOSTOS – EQUIVALÊNCIA (VDT)

Primeiramente, cabe ressaltar, que os saldos devedores do Sistema de Prestação Constante – Price se constituem, também, na diferença entre o valor do empréstimo e o valor presente das amortizações realizadas (parcelas pagas), resultando no saldo devedor na data zero, para depois capitalizar até a data pretendida, como se comprova:

$$SD_1 = \left[100.000,00 - \frac{31.547,08}{(1+10\%)^1} \right] \times (1+10\%)^1 \Rightarrow 78.452,92$$

$$SD_2 = \left[100.000,00 - \left(\frac{31.547,08}{(1+10\%)^1} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^2} \right) \right] \times (1+10\%)^2 \Rightarrow 54.751,13$$

$$SD_3 = \left[100.000,00 - \left(\frac{31.547,08}{(1+10\%)^1} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^2} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^3} \right) \right] \times (1+10\%)^3 \Rightarrow 28.679,16$$

$$SD_4 = \left[100.000,00 - \left(\frac{31.548,07}{(1+10\%)^1} + \frac{31.548,07}{(1+10\%)^2} + \frac{31.548,07}{(1+10\%)^3} + \frac{31.548,07}{(1+10\%)^4} \right) \right] \times (1+10\%)^4 \Rightarrow 0$$

É oportuno lembrar que todos os saldos devedores contêm juros (VDT); pois, são os saldos devedores na data zero, capitalizados de forma composta até à data pretendida, **inclusive, nos sistemas de amortização em juros simples**; porém, por óbvio, nesses sistemas, os saldos devedores, na data zero, devem ser descapitalizados para data zero e depois capitalizados até à data pretendida, de forma simples,.

É importante destacar que **os saldos devedores**, em qualquer sistema de amortização, **é o saldo devedor na data zero (valor do empréstimo menos as amortizações havidas), capitalizado até à data pretendida**. Todavia, como veremos, isso não ocorre no Sistema de Amortização por meio do Método de Gauss, caracterizando falta de consistência científico-financeira.

Depois de ficar clarividente que os saldos devedores contêm juros; pois, além de estarem em datas diferentes da data zero, são os montantes dos saldos devedores na data zero, capitalizados de forma composta até a data pretendida, vamos calcular os valores das amortizações efetivamente realizadas, tomando como base esses mesmos saldos devedores.

Aproveitando que todos já devem ter entendido que amortização é capital ou parte do capital (valor presente), é fundamental enfatizar que, ao descapitalizamos o valor de uma prestação, desincorporando os juros contidos no período, estamos, na realidade, calculando o valor da respectiva e efetiva amortização: conclusão aplicável a qualquer sistema de amortização, inclusive em juros simples:

$$A_1 = \frac{31.547,08}{(1+10\%)^1} \Rightarrow 28.679,16 \Rightarrow A_2 = \frac{31.547,08}{(1+10\%)^2} \Rightarrow 26.071,97$$

$$A_3 = \frac{31.547,08}{(1+10\%)^3} \Rightarrow 23.701,79 \Rightarrow A_4 = \frac{31.547,08}{(1+10\%)^4} \Rightarrow 21.547,08$$

É fundamental ressaltar que, ao descapitalizamos o valor da prestação, desincorporando os juros contidos no período, estamos, na realidade, calculando o valor da respectiva amortização: **conclusão aplicável em qualquer sistema de amortização, inclusive em juros simples**. Todavia, como veremos, isso não ocorre no Sistema de Amortização por meio do Método de Gauss, caracterizando, mais uma vez, falta de consistência científico-financeira.

Depois de ficar clarividente que os saldos devedores contêm juros; pois, são os montantes dos saldos devedores na data zero, vamos calcular os valores das amortizações efetivamente realizadas, tomando como base esses mesmos saldos devedores.

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da primeira prestação (SD_1), desincorporando os juros compostos, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira amortização. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor será, efetivamente, o valor da primeira amortização, e assim sucessivamente, por óbvio:

$$A_1 = 100.000,00 - \frac{78.452,92}{(1+10\%)^1} \Rightarrow 28.679,16$$

$$A_2 = 100.000,00 - \frac{54.751,13}{(1+10\%)^2} - 28.679,16 \Rightarrow 26.071,97$$

$$A_3 = 100.000,00 - \frac{28.679,16}{(1+10\%)^3} - 28.679,16 - 26.071,97 \Rightarrow 23.701,79$$

$$A_4 = 100.000,00 - 28.679,16 - 26.071,97 - 23.701,79 \Rightarrow 21.547,08$$

É fundamental destacar que, ao descapitalizarmos o saldo devedor, depois do pagamento de cada prestação, desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero. Por conseguinte, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, deduzidas as demais amortizações havidas, será o valor de cada amortização, por óbvio: **conclusão aplicável em qualquer sistema de amortização, inclusive em juros simples.** Todavia, como veremos, isso não ocorre no Sistema de Amortização por meio do Método de Gauss, caracterizando, mais uma vez, falta de consistência científico-financeira.

Conseqüentemente, a diferença entre a prestação constante e a amortização será os juros. Ressalte-se, porém, que os juros, também, podem ser calculados sobre o valor de cada amortização, ratificando que podemos considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, igual a um único empréstimo de \$ 100.000,00, cujos montante são os valores da prestação:

$$J_1 = 28.679,16 \times [(1+10\%)^1 - 1] \Rightarrow 2.867,16 \therefore M_1 = 28.679,16 + 2.867,16 \Rightarrow 31.547,08$$

$$J_2 = 26.071,97 \times [(1+10\%)^2 - 1] \Rightarrow 5.475,11 \therefore M_2 = 28.679,16 + 5.475,11 \Rightarrow 31.547,08$$

$$J_3 = 23.701,79 \times [(1+10\%)^3 - 1] \Rightarrow 7.845,29 \therefore M_3 = 28.679,16 + 7.845,29 \Rightarrow 31.547,08$$

$$J_4 = 21.547,08 \times [(1+10\%)^4 - 1] \Rightarrow 10.000,00 \therefore M_4 = 28.679,16 + 10.000,00 \Rightarrow 31.547,08$$

Fica muito claro, então, que realizar um empréstimo de \$ 100.000,00 é o mesmo que realizar quatro empréstimos distintos de \$ 28.679,16, \$ 26.071,97, \$ 23.701,79 e \$ 21.547,08; porquanto, em ambos os casos, efetuaremos quatro pagamentos mensais e iguais a \$ 31.547,08, qualquer que seja a data focal para realizar a equivalência. Como veremos, é o mesmo que ocorre no Sistema de Prestação Constante em Juros Simples - Equivalência; porém, isso não ocorre no Sistema de Amortização por meio do Método de Gauss, caracterizando, mais uma vez, falta de consistência científico-financeira.

Em conseqüência, calculados todos os elementos, revela-se muito simples montar a planilha de amortização do **Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos - SPCJC (VDT)**, evidenciando que não há prioridade entre juros e amortização; pois, além de serem pagos, concomitantemente, fica a critério de cada um calcular, primeiramente, o juro ou a amortização:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR	FATOR JC
0				100.000,00	
1	31.547,08	2.867,92	28.679,16	71.320,84	0,9090909
2	31.547,08	5.475,11	26.071,97	45.248,87	0,8264463
3	31.547,08	7.845,29	23.701,79	21.547,08	0,7513148
4	31.547,08	10.000,00	21.547,08	0,00	0,6830135
Σ	126.188,32	26.188,32	100.000,00		3,16986545

Oportuno constatar que o valor das prestações, também, pode ser obtido pela divisão do valor do empréstimo pelo somatório dos fatores de descapitalização, como somos obrigados a realizar na capitalização simples. Da mesma forma, cabe destacar que os valores dos juros e das amortizações ocorrem de forma invertida aos obtidos no Sistema Francês, ratificando a concretude do Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos, financeiramente, nos parece bastante óbvio que quanto mais distante a prestação, mais juros conterà!

Nota-se, com muita facilidade, que o valor de cada **amortização** é, também, **resultado da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**. Consequentemente, o valor do **juro** é, também, resultado da **multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo**, resultando em valores invertidos em relação ao Sistema Francês. Por óbvio, não se trata de meras coincidências e, sim, de pura matemática financeira, como comprovamos, exaustivamente!

Fica patente, então, que se pode considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos – SPCJC (VDT). Para ficar mais claro, ainda, vamos elaborar a planilha de amortização, distribuindo os juros, periodicamente:

Empréstimos Amortizações	VALOR DOS JUROS COMPOSTOS MENSAIS				Pagamentos		Saldo
	1	2	3	4	∑ Juros	Prestação	Devedor
0							100.000,00
1	28.679,16	2.867,92			2.867,92	31.547,08	78.452,92
2	26.071,97	2.607,20	2.867,92		5.475,11	31.547,08	54.751,13
3	23.701,79	2.370,18	2.607,20	2.867,92	7.845,29	31.547,08	28.679,16
4	21.547,08	2.154,71	2.370,18	2.607,20	10.000,00	31.547,08	0,00
∑	100.000,00	10.000,00	7.845,29	5.475,11	2.867,92	26.188,32	126.188,32

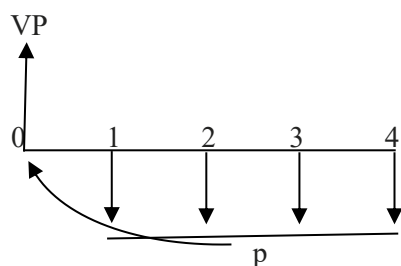
Verificando a planilha, podemos constatar, com certa facilidade, que \$ 10.000,00 é a soma dos juros do primeiro período dos quatro empréstimos e não o juro do primeiro período, como considera, equivocadamente, o Sistema Francês. Da mesma forma, podemos constatar, com certa facilidade, que os juros crescem periodicamente, de forma exponencial, e que a soma com o valor da amortização, periodicamente, produz o valor da prestação constante, como sói acontecer!

Honestamente, o Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos (VDT), sim, poderia ser chamado de Price; porquanto, é construído com os mesmos fundamentos com que elaborou suas famosas Tabelas Financeiras. Certamente, Richard Price sentir-se-ia devidamente homenageado, diferentemente, do que usar seu nome em vão, num sistema imperfeito, financeiramente, quando da separação da prestação em juros e amortização.

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE EM JUROS SIMPLES – EQUIVALÊNCIA (VDT)

Adotando o mesmo exemplo de um empréstimo de \$ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, sem entrada, à taxa de juros simples de 10% ao mês, elaborar a planilha de amortização.

O fluxo de caixa representa a movimentação de dinheiro: entradas e saídas. Para o tomador de empréstimo, o valor do empréstimo (entrada) e os respectivos quatro pagamentos (saídas). Simples, assim!



$$VP = \frac{p}{(1+i \times 1)} + \frac{p}{(1+i \times 2)} + \frac{p}{(1+i \times 3)} + \frac{p}{(1+i \times 4)}$$

Como o valor de p é comum, colocamos em evidência (fatoramos) e obtemos:

$$VP = p \times \left[\frac{1}{(1+i \times 1)} + \frac{1}{(1+i \times 2)} + \frac{1}{(1+i \times 3)} + \frac{1}{(1+i \times 4)} \right]$$

Como se observa, entre colchetes, a soma dos termos não forma nenhum tipo de progressão, tornando-se uma equação irreduzível. Então, temos que somar os fatores de descapitalização, periodicamente, para o cálculo do valor presente ou do valor da prestação constante.

Conclui-se, por conseguinte, que o valor presente e o valor da prestação poderão ser obtidos pela multiplicação do valor da prestação e pela divisão do valor presente (capital), ambos, pelo somatório dos fatores de descapitalização em juros simples, respectivamente::

$$VP = p \times \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+i \times j)} \quad \Rightarrow \quad p = VP \div \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+i \times j)}$$

Por conseguinte, para cálculo do valor da prestação, teremos:

$$p = \frac{100.000,00}{(0,90909 + 0,83333 + 0,76923 + 0,71429)} \Rightarrow \frac{100.000,00}{3,225941} = 30.998,71$$

Considerando que **na capitalização simples a data focal, obrigatoriamente, tem que ser a data zero**, como, exaustivamente comprovado, os saldos devedores serão a diferença entre o valor do empréstimo e o valor presente das parcelas pagas, constituindo-se no saldo devedor na data zero, para depois capitalizarmos essa diferença até a data pretendida, da mesma forma demonstrada no Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos, como se comprova:

$$SD_1 = \left[100.000,00 - \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} \right] \times (1+10\% \times 1) \Rightarrow 79.001,29$$

$$SD_2 = \left\{ 100.000,00 - \left[\frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 2)} \right] \right\} \times (1+10\% \times 2) \Rightarrow 55.184,52$$

$$SD_2 = \left\{ 100.000,00 - \left[\frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 2)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 3)} \right] \right\} \times (1+10\% \times 3) \Rightarrow 28.784,52$$

$$SD_2 = \left\{ 100.000,00 - \left[\frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} + \frac{30.998,714}{(1+10\% \times 2)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 3)} + \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 4)} \right] \right\} \times (1+10\% \times 4) \Rightarrow 0$$

Depois de ficar clarividente que os saldos devedores são montantes, contêm juros simples; pois, são os montantes dos saldos devedores da data zero, vamos calcular os valores das amortizações efetivamente realizadas, tomando como base esses mesmos saldos devedores, da mesma forma demonstrada no Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos.

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da primeira prestação (SD_1), desincorporando os juros simples, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira amortização. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor será o valor da primeira amortização, e assim sucessivamente, por óbvio:

$$A_1 = 100.000 - \frac{79.001,29}{(1+10\% \times 1)} \Rightarrow 28.180,65$$

$$A_2 = 100.000 - \frac{55.184,52}{(1+10\% \times 2)} - 28.180,65 \Rightarrow 25.832,26$$

$$A_3 = 100.000 - \frac{28.784,52}{(1+10\% \times 3)} - 28.180,65 - 25.832,26 \Rightarrow 23.845,16$$

$$A_4 = 100.000 - 28.180,65 - 25.832,26 - 23.845,16 \Rightarrow 22.141,93$$

Como comprovamos anteriormente, ficou evidente que o valor dos juros contidos na 1ª prestação é a diferença entre a prestação e a respectiva prestação, descapitalizada em juros simples por 1 período; o valor dos juros contidos na 2ª prestação é a diferença entre a prestação e a respectiva prestação descapitalizada em juros simples por 2 períodos, e assim por diante, como se comprova:

$$J_t = p - \frac{p}{(1+i \times t)}$$

$$J_1 = 30.998,71 - \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} \Rightarrow 2.818,06 \quad J_2 = 30.998,71 - \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 2)} \Rightarrow 5.166,45$$

$$J_3 = 30.998,71 - \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 3)} \Rightarrow 7.153,55 \quad J_4 = 30.998,71 - \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 8.856,77$$

Além disso, aproveitando que todos já devem ter entendido que em qualquer prestação há juro e amortização, exceto pagamento no ato, e que, por consequência, juro é a diferença entre prestação e respectiva amortização, a fórmula está nos revelando que $p \div (1+i \times n)$ é o valor da 4ª (última) amortização; $p \div [1+i \times (n-1)]$ é o valor da 3ª (penúltima) amortização; $p \div [1+i \times (n-2)]$ é o valor da 2ª (antepenúltima) amortização e $p \div [1+i \times (n-3)]$ é o valor da 1ª amortização, como se comprova:

$$\text{Se } J_t = p - \frac{p}{(1+i \times t)} \text{ e } J_t = p - A_t \therefore A_t = \frac{p}{(1+i \times t)}$$

$$A_1 = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 1)} \Rightarrow 28.180,64 \quad A_2 = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 2)} \Rightarrow 25.832,26$$

$$A_3 = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 3)} \Rightarrow 23.845,16 \quad A_4 = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 22.141,94$$

Ressalte-se que os juros, podem, também, ser calculados sobre o valor de cada amortização, pelos respectivos prazos e taxa periódica, ratificando que podemos considerar como se fossem 4 empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações, como se comprova:

$$J_1 = 28.180,64 \times 10\% \times 1 \Rightarrow 2.818,06 \therefore M = 28.180,64 + 2.818,06 \Rightarrow 30.998,71$$

$$J_2 = 25.832,26 \times 10\% \times 2 \Rightarrow 5.166,45 \therefore M = 25.832,26 + 5.166,45 \Rightarrow 30.998,71$$

$$J_3 = 23.845,16 \times 10\% \times 3 \Rightarrow 7.153,55 \therefore M = 23.845,16 + 7.153,55 \Rightarrow 30.998,71$$

$$J_4 = 22.141,94 \times 10\% \times 4 \Rightarrow 8.856,77 \therefore M = 22.141,94 + 8.856,77 \Rightarrow 30.998,71$$

Fica muito claro, então, que realizar um único empréstimo de \$ 100.000,00, a juros simples de 10% ao mês, por 4 meses, para liquidar com um pagamento de \$ 140.000,00, é o mesmo que realizar 4 empréstimos distintos de \$ 28.180,64, \$ 25.832,26, 23.845,16 e 22.141,94, para liquidar em 4 parcelas mensais de \$ 30.998,71; porquanto, nos dois casos, liquidam o empréstimo de \$ 100.000,00, exigência da capitalização simples, como, aliás, já comprovamos, exaustivamente

Em consequência, tendo todos os elementos, revela-se muito simples montar a planilha de amortização desse Sistema de Prestação Constante em Juros Simples - SPCJS (VDT), evidenciando, mais uma vez, que não há prioridade entre juros e amortização; pois, além de serem pagos, concomitantemente, fica a critério de cada um calcular, primeiramente, o juro ou a amortização:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR	FATOR JS
0				100.000,00	
1	30.998,71	2.818,06	28.180,65	79.001,29	0,909091
2	30.998,71	5.166,45	25.832,26	55.184,52	0,833333
3	30.998,71	7.153,55	23.845,16	28.784,52	0,769231
4	30.998,71	8.856,77	22.141,94	0,00	0,714286
Σ	123.994,84	23.994,84	100.000,00		3,225941

Oportuno constatar que o valor das prestações pode ser obtido, **somente**, pela divisão do valor do empréstimo pelo somatório dos fatores de descapitalização, em razão de estarmos defronte de uma equação irredutível, diferentemente da capitalização composta; porquanto, na capitalização simples a equivalência tem que ser realizada, obrigatoriamente, na data zero,

Nota-se, com muita facilidade, que o valor de cada **amortização** é, também, **resultado da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**, da mesma forma que demonstramos no SPC em Juros Compostos. Consequentemente, o valor do **juro** é, também, resultado da **multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo**, da mesma forma, também, que demonstramos no SPC em Juros Compostos. Por óbvio, não se trata de meras coincidências e, sim, de pura matemática financeira, como comprovamos, exaustivamente!

Fica patente, então, que devemos considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Simples – SPCJS (VDT):

Empréstimos Amortizações	VALOR DOS JUROS SIMPLES MENSAIS				Pagamentos		Saldo
	1	2	3	4	Σ Juros	Prestação	Devedor
0							100.000,00
1	28.180,65	2.818,06			2.818,06	30.998,71	79.001,29
2	25.832,26	2.583,23	2.583,23		5.166,45	30.998,71	55.184,52
3	23.845,16	2.384,52	2.384,52	2.384,52	7.153,55	30.998,71	28.784,52
4	22.141,94	2.214,19	2.214,19	2.214,19	8.856,77	30.998,71	0,00
Σ	100.000,00	10.000,00	7.181,94	4.598,71	2.214,19	23.994,84	123.994,84

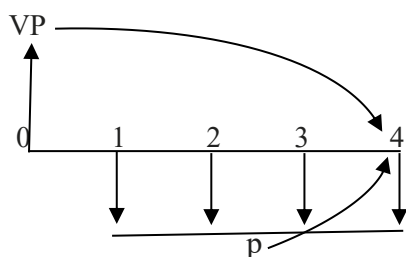
Como se constata, os juros são calculados apenas sobre o principal de cada empréstimo (capital = valor presente), sendo iguais em cada período, caracterizando, de forma inequívoca e clarividente, a não presença do anatocismo: juros sobre juros, como é certo que não aconteça, diferentemente da capitalização composta, em que a taxa incide não apenas sobre o principal; mas, também, sobre os juros dos períodos anteriores.

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE – MÉTODO DE GAUSS

O dito Sistema de Prestação Constante (SPC) - **Método de Gauss**, conhecido também como Método Linear Ponderado, foi, **pretensamente**, desenvolvido no regime de juros simples; porém, com a equivalência sendo, **equivocadamente**, realizada na data do valor futuro (n), para liquidação de empréstimos, por meio de prestações constantes, periódicas e postecipadas, resultado do somatório dos encargos financeiros (juros) e da parcela de capital (amortização), que é **crescente em progressão aritmética**, com o intuito de substituir o SPC em Juros Compostos – Price, cuja amortização é crescente em **progressão geométrica**.

Adotando o mesmo exemplo, de um empréstimo de \$ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, sem entrada, à taxa de juros simples de 10% ao mês, depois de calcular o valor da prestação, com a equivalência na data focal final 4 (n), elaborar a planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



$$100.000 \times (1 + 10\% \times 4) = p \times (1 + 10\% \times 3) + p \times (1 + 10\% \times 2) + p \times (1 + 10\% \times 1) + p$$

$$100.000 \times (1 + 10\% \times 4) = p \times [(1 + 10\% \times 3) + (1 + 10\% \times 2) + (1 + 10\% \times 1) + 1] \Rightarrow p = \frac{140.000}{4,60} \Rightarrow 30.434,78$$

Atendendo às características desse **equivocado sistema**, em que a amortização é crescente em progressão aritmética, no caso crescente em 10% do valor da primeira amortização, conseqüentemente, os juros serão decrescentes a esse mesmo valor. Então, sabendo que a razão da progressão é 10% da primeira amortização, a soma das amortizações é o valor do empréstimo e tendo o número de parcelas, utilizamos a fórmula da soma dos termos para calculamos o valor da primeira amortização e montarmos a planilha:

n	Prestação	Juros	Amortização	S Devedor
0				100.000,00
1	30.434,78	8.695,65	21.739,13	78.260,87
2	30.434,78	6.521,74	23.913,04	54.347,83
3	30.434,78	4.347,83	26.086,96	28.260,87
4	30.434,78	2.173,91	28.260,87	0,00
	121.739,13	21.739,13	100.000,00	

Contudo, caso o devedor decida pagar a primeira prestação um mês antes, certamente, o credor jamais aceitará retirar os juros de \$ 8,695,65 e receber \$ 21.739,13; porquanto, os juros contidos na primeira prestação não são esses calculados **por convenção** e, sim, \$ 2.766,80, e o credor deverá receber o valor justo e correto de \$ 27.667,98, como se verifica na planilha correta, seguinte, demonstrando que o Sistema de Amortização por meio do Método de Gauss, financeiramente, é imprestável.

Cabe salientar, no entanto, que a planilha “fecha”, como dizem alguns, zerando o saldo devedor depois do pagamento da última prestação, pelo simples fato de que a amortização cresce em progressão aritmética, de razão igual ao produto da taxa pelo primeira amortização, cuja soma das amortizações deve ser igual ao valor do empréstimo: simples aritmética!

No entanto, é importante evidenciar, mais uma vez, que a equivalência no regime de juros simples, obrigatoriamente, deverá ser realizada na data focal zero; porquanto, em qualquer outra data, nesse caso na data final (n), a taxa incidirá sobre montantes, caracterizando juros sobre juros, como já comprovamos, pormenorizada e cientificamente. Em consequência, revela-se muito simples montar a **correta planilha** de amortização desse Sistema de Prestação Constante – Método de Gauss:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR	FATOR JS
0				100.000,00	
1	30.434,78	2.766,80	27.667,98	79.565,22	0,909091
2	30.434,78	5.072,46	25.362,32	56.363,64	0,833333
3	30.434,78	7.023,41	23.411,37	30.625,82	0,769231
4	30.434,78	8.695,65	21.739,13	2.546,87	0,714286
Σ	121.739,13	23.558,33	98.180,80		3,225941

Agora, caso o devedor decida pagar a primeira prestação um mês antes, certamente, o credor aceitará descontar os juros simples de \$ 2.766,80 e receberá o valor justo e correto de \$ 27.667,98.

Como se verifica, essas 4 prestações postecipadas, mensais e iguais, quando descapitalizadas a juros simples de 10% ao ano, até à data zero, não são equivalentes a \$ 100.000,00, restando saldo a pagar de \$ 2.546,87, **ratificando que o empréstimo não foi realizado no regime de juros simples**. Como existem apenas dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, certamente, foi realizado no regime de juro composto, com a taxa de juros incidindo sobre as prestações, que contêm juros da data zero até a data de cada prestação.

Nota-se, com muita facilidade, que o valor correto de cada **amortização (capital)**, como em todos os sistemas, é **resultado da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**. Consequentemente, o valor do **juro simples** é resultado da **multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo**. Por óbvio, não se trata de meras coincidências e, sim, de pura matemática financeira, como comprovamos, exaustivamente!

Fica patente, então, que se pode considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Simples – Método de Gauss:

Empréstimos	VALOR DOS JUROS SIMPLES MENSAIS				Pagamentos		Saldo	
	Amortização	1	2	3	4	Σ Juros	Prestação	Devedor
0								100.000,00
1	27.667,98	2.766,80				2.766,80	30.434,78	79.565,22
2	25.362,32	2.536,23	2.536,23			5.072,46	30.434,78	56.363,64
3	23.411,37	2.341,14	2.341,14	2.341,14		7.023,41	30.434,78	30.625,82
4	21.739,13	2.173,91	2.173,91	2.173,91	2.173,91	8.695,65	30.434,78	2.546,87
Σ	98.180,80	9.818,08	7.051,28	4.515,05	2.173,91	23.558,33	121.739,13	

Como se verifica, o valor presente das quatro parcelas totaliza \$ 98.180,80, soma das amortizações (empréstimos), restando saldo a pagar de \$ 1.819,20 na data zero que, capitalizados a juros simples de 10% ao mês, corresponderá, na data final quatro, a \$ 2.546,87, ratificando saldo devedor na data quatro da planilha de amortização, anterior.

Diante disso, conclui-se que o dito **Método de Gauss não exprime consistência científica** ao não cumprir condição fundamental de um sistema de amortização: liquidar integralmente o valor do empréstimo; sendo, portanto, financeiramente, imprestável, devendo ser, **peremptoriamente, descartado**.

É importante enfatizar que convenções para separar juros e amortizações, ignorando o valor do dinheiro no tempo, independentemente de seus valores, servem apenas para efeito fisco-contábil; porquanto, os juros efetivamente pagos estão contidos nas prestações e as amortizações efetivamente realizadas, além de contidas nas prestações, estão consideradas nos saldos devedores, como exaustivamente demonstrado e comprovado.

Como sobejamente demonstrado e cientificamente comprovado, no regime de capitalização simples é conceitualmente incorreto proceder à equivalência em data diversa da data zero, nesse nosso exemplo do Método de Gauss na data quatro, fracionando o prazo e cindindo o valor futuro, em que se comprovou matematicamente que o valor do empréstimo não foi remunerado de forma equânime ao montante das parcelas e, por consequência, o empréstimo não foi liquidado integralmente, por descaracterizar o regime de juros simples, ao incidir a taxa sobre parcelas que contêm juros, da data zero até às datas de cada parcela.

Portanto, realizar a equivalência na data final (n), fracionando o prazo e cindindo o valor futuro, e insistir que o Método de Gauss capitaliza juros simples, saltam aos olhos duas únicas alternativas: ou se trata de ignorância financeira ou de desonestidade intelectual. Certamente, depois de todas as comprovações científicas, detalhada e exaustivamente demonstradas, restará, apenas, uma alternativa, caso a negação à Matemática Financeira, enquanto ciência exata, persista!

Finalizando, há necessidade de se fazer justiça ao matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss; porquanto, um dos maiores QI de todos os tempos e conhecido como “o mais notável dos matemáticos”, jamais teria construído um sistema de amortização, financeiramente, imprestável. Portanto, é importante e justo que se deixe de utilizar seu nome em vão!

Eu, como professor de matemática financeira, há quase meio século, enquanto ciência exata que trata do valor do dinheiro no tempo, tenho o **dever de zelar pelo rigor científico**.

Parafraseando Albert Einstein, a Matemática Financeira, enquanto ciência exata, não mente!

AULA ENCERRADA!